

Theoretische Physik IV (Statistische Physik)

Vorlesung: PD Dr. Stefan Förste

Übungsleitung: M.Sc. Fabian Fischbach

<http://www.th.physik.uni-bonn.de/people/fischbach/ws1819/tp4>

–HAUSAUFGABEN–

Abgabe der Hausaufgaben: keine

Besprechung der Hausaufgaben: Di./Mi. 29./30.01.2019 (in den Übungen)

H.14.1 Zustandsdichte und thermodynamische Größen

Die Zustandsdichte ist definiert durch¹

$$\nu(\varepsilon) = \frac{g_J V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\vec{p}}) . \quad (1)$$

Somit gilt für eine Funktion f , die nur von der Einteilchenenergie $\varepsilon_{\vec{p}}$ abhängt

$$\int d^3p f(\varepsilon_{\vec{p}}) = \int d\varepsilon \int d^3p f(\varepsilon) \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\vec{p}}) = \frac{(2\pi\hbar)^3}{g_J V} \int d\varepsilon \nu(\varepsilon) f(\varepsilon) . \quad (2)$$

a) Zeigen Sie, dass für das ideale Fermi-Gas gilt

$$\nu_I(\varepsilon) = \frac{3}{2} N \varepsilon_F^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\varepsilon} \quad \text{mit} \quad \varepsilon_F = \left(\frac{N}{V} \frac{6\pi^2}{g_J} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m} . \quad (3)$$

Hinweis: Verwenden Sie dabei

$$\delta(f(x)) = \sum_{\{i|f(x_i)=0, f'(x_i) \neq 0\}} \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i) . \quad (4)$$

Für die Erwartungswerte der Teilchenzahl und Energie gilt bei allgemeiner Zustandsdichte $\nu(\varepsilon)$

$$N = \int_0^\infty d\varepsilon \nu(\varepsilon) n(\varepsilon) , \quad E = \int_0^\infty d\varepsilon \nu(\varepsilon) n(\varepsilon) \varepsilon , \quad (5)$$

wobei

$$n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{k_B T}} + 1} \quad (6)$$

die Fermi-Verteilungsfunktion ist. Die Fermi-Energie ist gegeben durch die maximale Einteilchenenergie der besetzten Zustände bei $T = 0$, d.h.

$$N = \int_0^{\varepsilon_F} d\varepsilon \nu(\varepsilon) . \quad (7)$$

¹Hierin ist g_J ein zu Spin- oder Drehimpulszuständen gehöriger Entartungsfaktor. Verallgemeinerungen zu Einteilchenenergien, die nicht nur vom Impuls \vec{p} abhängen, sind offensichtlich.

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für niedrige Temperaturen näherungsweise

$$\int_0^\infty d\varepsilon n(\varepsilon)f(\varepsilon) = \int_0^\mu d\varepsilon f(\varepsilon) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 f'(\mu) + \mathcal{O}\left((k_B T)^4\right) \quad (8)$$

gilt².

b) Zeigen Sie zunächst mit Hilfe von (8), dass für niedrige Temperaturen näherungsweise

$$\mu - \varepsilon_F = -\frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \frac{\nu'(\varepsilon_F)}{\nu(\varepsilon_F)} (1 + \mathcal{O}(T^2)) \quad (9)$$

gilt.

c) Zeigen Sie (mit dem Ergebnis aus b)), dass für den Erwartungswert der Energie bei niedrigen Temperaturen näherungsweise

$$E = E_0 + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \nu(\varepsilon_F) + \mathcal{O}(T^4) \quad \text{mit} \quad E_0 = \int_0^{\varepsilon_F} d\varepsilon \nu(\varepsilon)\varepsilon \quad (10)$$

gilt.

d) Zeigen Sie, dass hieraus

$$C_V = \frac{\pi^2}{3} k_B^2 T \nu(\varepsilon_F) + \mathcal{O}(T^3) \quad (11)$$

folgt.

e) Für homogene Systeme gilt für die isotherme Kompressibilität

$$\kappa_T = \frac{V}{N^2} \left(\frac{\partial N}{\partial \mu} \right)_{T,V} . \quad (12)$$

Verwenden Sie diese Relation, um zu zeigen, dass

$$\kappa_T = \frac{V}{N^2} \nu(\varepsilon_F) + \mathcal{O}(T^2) \quad (13)$$

gilt.

Diese Relationen zeigen, dass für das Tieftemperaturverhalten thermodynamischer Größen nur der Wert der Zustandsdichte bei der Fermi-Energie maßgeblich ist.

H.14.2 Thermisches Photonengas

Wir betrachten ein thermisches Photonengas mit der Energie-Impuls-Beziehung $E = |p|c$. Die Zustandsdichte für ein solches Gas ist gegeben durch³

$$\rho(E) = \frac{VE^2}{\pi^2 \hbar^3 c^3} . \quad (14)$$

²Beachten Sie, dass es sich hierbei um eine asymptotische Reihe handelt.

³In der Zustandsdichte wurde bereits ein Faktor 2 für den Polarisationsfreiheitsgrad berücksichtigt.

- a) Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme sowie das großkanonische Potential des Photonengases. Was gilt dabei für μ ?
Sie sollten folgendes Ergebnis erhalten

$$\Phi = -\frac{\pi^2 k_B^4}{45 \hbar^3 c^3} V T^4 . \quad (15)$$

Hinweis: $\int_0^\infty dx x^2 \log(1 - e^{-x}) = -\frac{\pi^4}{45}$

- b) Berechnen Sie nun die mittlere Photonenzahl N .
Sie sollten folgendes Ergebnis erhalten

$$N = 0,244 \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3 V . \quad (16)$$

Hinweis: $\frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty dx \frac{x^2}{e^x - 1} \approx 0,244$

- c) Berechnen Sie aus dem großkanonischen Potential die Entropie S sowie die innere Energie E . Die Temperaturabhängigkeit der inneren Energie des Photonengases heißt *Stefan-Boltzmann-Gesetz*.

Hinweis: Vergleichen Sie die freie Energie mit dem großkanonischen Potential.

- d) Verwenden Sie geeignete thermodynamische Ableitungen, um die thermische Zustandsgleichung zu berechnen. Bestimmen Sie hierzu den Druck P , auch Strahlungsdruck genannt, bei der Temperatur T . Hängt der Druck vom Volumen V ab? Interpretieren Sie das Ergebnis physikalisch.

- e) Betrachten Sie nun abschließend die adiabatische Zustandsgleichung. Hierzu schauen wir uns Zustandsänderungen an, bei denen sich das Volumen ohne Wärmeaustausch ändert, d.h. $dS = 0$. Was gilt hierbei für die Änderung der Photonenzahl N ?

Stellen Sie hiermit die Zusammenhänge $T(V)$ sowie $P(V)$ für die adiabatische Zustandsänderung her. Eine adiabatische Ausdehnung erfolgte z.B. bei der Expansion des frühen Universums, seit das Photonengas von der Wechselwirkung mit Materie abgekoppelt war.

Hinweis: Vergleichen Sie (b) und (c).