Universität Bonn
Physikalisches Institut
Theoretische Physik

Übungsblatt 1
09.10.2018
WS 18/19

Theoretische Physik IV (Statistische Physik)

Vorlesung: PD Dr. Stefan Förste
Übungsleitung: M.Sc. Fabian Fischbach

`http://www.th.physik.uni-bonn.de/people/fischbach/ws1819/tp4`

–Hausaufgaben–

Abgabe der Hausaufgaben: Di./Mi. 16./17.10.2018 (in den Übungen)

Besprechung der Hausaufgaben: Di./Mi. 23./24.10.2018 (in den Übungen)

H.1.1 Wahrscheinlichkeitstheorie (10 Punkte)

In dieser Aufgabe möchten wir die für die statistische Physik grundlegenden Begriffe aus der Wahrscheinlichkeitstheorie wiederholen. Hierbei betrachten wir sowohl eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung, die *Binomialverteilung*, als auch eine kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung, die *Gaußverteilung*.

Eine Zufallsvariable X ist eine Abbildung, die einem Ereignis e aus der Ereignismenge E einen Wert x aus einer Menge Ω zuordnet

$$\begin{aligned} X : E &\longrightarrow \Omega \\ e &\longmapsto x \ . \end{aligned} \tag{1}$$

Die Zufallsvariable x kann sowohl eine diskrete als auch eine kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung besitzen, welche wir W nennen

$$\begin{aligned} W : \Omega &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto w(x) \ . \end{aligned} \tag{2}$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung muss hierbei normiert sein[1]

$$\int_\Omega w(x)\ \mathrm{d}x = 1 \ . \tag{3}$$

Der Erwartungswert der Zufallsvariablen X ist definiert als

$$\langle X \rangle := \int_\Omega w(x) \cdot x\ \mathrm{d}x \ . \tag{4}$$

Des Weiteren sind die n-ten Momente der Wahrscheinlichkeitsverteilung definiert als

$$\mu_n := \langle X^n \rangle := \int_\Omega w(x) \cdot x^n\ \mathrm{d}x \ . \tag{5}$$

Ein Maß für die Schwankung der Wahrscheinlichkeitsverteilung um den Erwartungswert ist gegeben durch das Schwankungsquadrat[2]

$$(\Delta x)^2 := \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 \, . \tag{6}$$

[1] Für den Fall einer diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung muss das Integral durch eine entsprechende Summe ersetzt werden.

[2] Machen Sie sich klar, dass die zweite Gleichheit nicht gefordert werden muss, sonders aus der Linearität des Erwartungswertes folgt.

a) Als erste Wahrscheinlichkeitsverteilung möchten wir uns die diskrete *Binomialverteilung* anschauen. Diese gibt an, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, bei einer Abfolge von N unabhängigen Versuchen, welche nur zwei Ergebnisse "Erfolg" oder "Misserfolg" zulassen, genau k mal "Erfolg" zu erzielen. Hierbei ist die Reihenfolge der Ergebnisse nicht von Belang. Sei $0 \leqslant p \leqslant 1$ die Wahrscheinlichkeit für "Erfolg", dann lässt sich die *Binomialverteilung* ausdrücken als

$$B(k; p, N) = \binom{N}{k} p^k \, (1-p)^{N-k} \ , \tag{7}$$

wobei $0 \leqslant k \leqslant N$ ist, d.h. $\Omega = \{0, 1, \cdots, N\}$.

i) Zeigen Sie, dass die *Binomialverteilung* normiert ist.

ii) Berechnen Sie die ersten zwei Momente der *Binomialverteilung*, d.h. $\langle X \rangle$ und $\langle X^2 \rangle$.

iii) Bestimmen Sie das Schwankungsquadrat.

(1+3+1 Punkte)

b) Eine der wichtigsten kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen ist die *Gaußverteilung*. Hierbei kann die Zufallsvariable X jede reelle Zahl annehmen, d.h. $\Omega = \mathbb{R}$. Die *Gaußverteilung* wird beschrieben durch

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \, \mathrm{e}^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \ . \tag{8}$$

Wir möchten nun einige Momente dieser Verteilung berechnen.

i) Zeigen Sie, dass folgende Identität gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \ , \tag{9}$$

wobei $a > 0$ gilt.
<u>*Hinweis*</u>: Betrachte das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a(x^2+y^2)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ in Polarkoordinaten.

ii) Berechne mit Hilfe von (9) das Integral

$$Z(J) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2+Jx} \, \mathrm{d}x \ , \tag{10}$$

wobei J eine Hilfsgröße ist.

iii) Bestimme für die *Gaußverteilung* die Größen $\langle X \rangle$, $(\Delta x)^2$, $\langle X^4 \rangle$, $\langle X - \langle X^3 \rangle \rangle$.
<u>*Hinweis*</u>: Man kann diese berechnen, indem man $\frac{\partial^n}{\partial J^n} Z(J)\big|_{J=0}$ mit den Momenten der *Gaußverteilung* in Verbindung bringt.

(2+1+2 Punkte)

–ANWESENHEITSAUFGABEN–

Bearbeitung und Besprechung der Anwesenheitsaufgaben:
Di./Mi. 16./17.10.2018 (in den Übungen)

A.1.1 Random Walk in einer Dimension

Ein Partikel bewege sich bei jedem Schritt mit je gleicher Wahrscheinlichkeit um eine Einheitsdistanz entweder nach rechts (positive Richtung) oder nach links (negative Richtung).

a) Berechnen Sie
   i) den Erwartungswert $\langle Y \rangle$
   ii) sowie das Moment $\langle Y^2 \rangle$

   der Distanz $Y := N_+ - N_-$ zur Startposition. Hierbei ist N_+ die erfolgte Schrittzahl in positiver Richtung nach $N = N_+ + N_-$ erfolgten Schritten insgesamt.

Wir wollen nun unter Zuhilfenahme der Stirlingschen Näherung in der Form

$$\log(n!) \approx \frac{1}{2}\log(2\pi) + \left(n + \frac{1}{2}\right)\log(n) - n \tag{11}$$

bestätigen, dass die zu Y gehörende Wahrscheinlichkeitsverteilung $w(y)$ im Falle großer Schrittzahl $N \gg 1$ durch eine Gauß-Verteilung approximiert wird. Hierzu entwickeln wir den Logarithmus von $w(y)$ um sein Maximum bis zur (und einschließlich der) quadratischen Ordnung in der Größe y.

b) i) Zeigen Sie zunächst die Identität

$$g(y) := \log(w(y)) = \log\left[\binom{N}{(N+y)/2}\right] - N\log(2) \ . \tag{12}$$

   ii) Nutzen Sie die Stirlingsche Näherung (und vereinfachen Sie).
   iii) Zeigen Sie, dass $y = 0$ ein lokales Maximum von g ist.
   iv) Folgern Sie nun für den Grenzfall $N \gg 1$

$$w(y) \propto \exp\left[-\frac{y^2}{2N}\right] . \tag{13}$$

   Hinweis: Der Proportionalitätsfaktor wird hier nicht bestimmt. Machen Sie sich dennoch klar, wie dieser zu wählen ist, um aus (13) eine korrekt normierte Wahrscheinlichkeitsverteilung zu erhalten.

Zum Schluss wollen wir unser Ergebnis mit jenem vergleichen, das man anhand des zentralen Grenzwertsatzes erhält[3].

c) i) Begründen Sie kurz, warum der zitierte Satz hier greift.
   ii) Welchen Erwartungswert $\langle Y \rangle$ und welche Schwankungsbreite Δy erhalten Sie hieraus? Vergleichen Sie.

[3] Sie dürfen dabei auf die entsprechenden Resultate im Lehrbuch von Schwabl zurückgreifen, nachdem Sie ihre Herleitung verstanden haben.