

Theoretische Physik IV (Statistische Physik)

Vorlesung: PD Dr. Stefan Förste

Übungsleitung: M.Sc. Fabian Fischbach

<http://www.th.physik.uni-bonn.de/people/fischbach/ws1819/tp4>

–HAUSAUFGABEN–

Abgabe der Hausaufgaben: Di./Mi. 23./24.10.2018 (in den Übungen)

Besprechung der Hausaufgaben: Di./Mi. 30./31.10.2018 (in den Übungen)

H.2.1 Poisson-Verteilung

(10 Punkte)

In dieser Aufgabe möchten wir uns die *Poisson*-Verteilung anschauen. Wir möchten diese aus der *Binomial*-Verteilung, welche wir bereits in H.1.1 kennen gelernt haben, herleiten.

Zur Erinnerung: die *Binomial*-Verteilung ist gegeben durch

$$B(k; p, N) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}. \quad (1)$$

a) Als erstes möchten wir zeigen, dass im Grenzfall

$$p \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad \bar{k} := pN = \text{const.} \quad (2)$$

die *Binomial*-Verteilung (1) in die *Poisson*-Verteilung

$$P(k; \bar{k}) = \frac{\bar{k}^k}{k!} e^{-\bar{k}} \quad (3)$$

übergeht.

i) Zeigen Sie hierfür zunächst

$$B(k; p, N) = \frac{\bar{k}^k}{k!} \left(1 - \frac{\bar{k}}{N}\right)^N \frac{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{N}\right)}{(1-p)^k}. \quad (4)$$

(2 Punkte)

ii) Zeigen Sie nun mit Hilfe von (4), dass im Grenzfall (2) aus der *Binomial*-Verteilung die *Poisson*-Verteilung wird. (1 Punkt)

b) Im zweiten Teil dieser Aufgabe möchten wir nun einige Kenngrößen der *Poisson*-Verteilung bestimmen.

i) Zeigen Sie, dass (3) normiert ist. Ferner berechnen sie den Erwartungswert $\langle k \rangle$ und das Schwankungsquadrat $(\Delta k)^2$. (2 Punkte)

- ii) Machen Sie sich klar, dass dies auch unmittelbar aus den für die *Binomial*-Verteilung berechneten Größen im Grenzfalle (2) folgt. (1 Punkt)
- iii) Berechnen Sie $\langle k^3 \rangle$ und $\langle k^4 \rangle$. Hieraus berechnen Sie $v(k) := \frac{\langle (k-\bar{k})^3 \rangle}{(\Delta k)^3}$ und $\beta_2 := \frac{\langle (k-\bar{k})^4 \rangle}{(\Delta k)^4}$. Hierbei handelt es sich um die Schiefe bzw. die Wölbung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung. Die Schiefe einer Verteilung gibt an, wie asymmetrisch die Verteilung ist. Die Wölbung hingegen gibt an, wie steil die Verteilung ist, d.h. wie gewichtig extreme Ereignisse sind. (3 Punkte)
- iv) Bestimmen Sie die charakteristische Funktion der *Poisson*-Verteilung. Diese ist definiert durch $\chi(m) = \langle e^{-imk} \rangle$. (1 Punkt)

H.2.2 Harmonischer Oszillator (5 Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir uns an den harmonischen Oszillator erinnern, der ein einfaches Beispiel in der Quantenmechanik darstellt. Ein System von solchen Oszillatoren dient wiederum als einfaches Beispiel für die Quantenstatistik.

Der Hamiltonoperator ist gegeben durch

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2. \quad (5)$$

- a) Zeigen Sie, unter Nutzung von $[x, p] = i\hbar$, dass für den (Absteige-)Operator

$$a = \frac{\omega m x + ip}{\sqrt{2\omega m \hbar}} \quad (6)$$

und a^\dagger die Beziehung $[a, a^\dagger] = 1$ gilt. (1 Punkt)

- b) Zeigen Sie dann

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (7)$$

(1 Punkt)

Wir erinnern uns, ohne erneuten Beweis, dass ein Orthonormalsystem $\{|n\rangle\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ von Eigenfunktionen zu H durch den Eigenwert n des Besetzungszahloperators $\hat{n} = a^\dagger a$ indiziert wird. Diese erfüllen

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (8)$$

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \quad (9)$$

- c) Betrachten wir nun den Zustand $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n\rangle + |n+1\rangle)$ für ein festes n . Zeigen Sie, dass für den Ortserwartungswert in diesem Zustand

$$\langle \psi | X(t) | \psi \rangle = c_1 \cos(c_2 t) \quad (10)$$

für zwei Konstanten c_i gilt.¹ (1 Punkt)

- d) Berechnen Sie außerdem den Erwartungswert $\langle \psi | X^2(t) | \psi \rangle$ sowie das Schwankungsquadrat $\langle \psi | (\Delta X(t))^2 | \psi \rangle$. (2 Punkte)

¹Im Heisenberg-Bild sind die Zustände zeitunabhängig, dafür hängen aber die Operatoren von der Zeit ab: Ist der Hamiltonoperator selbst zeitunabhängig, so ist die zeitliche Entwicklung eines Operators $O(t)$ durch $O(t) = e^{-iHt/\hbar} O e^{iHt/\hbar}$ gegeben.