Theoretische Physik IV (Statistische Physik)

Vorlesung: PD Dr. Stefan Förste
Übungsleitung: M.Sc. Fabian Fischbach
`http://www.th.physik.uni-bonn.de/people/fischbach/ws1819/tp4`

–Hausaufgaben–

Abgabe der Hausaufgaben: Di./Mi. 30./31.10.2018 (in den Übungen)
Besprechung der Hausaufgaben: Di./Mi. 6./7.11.2018 (in den Übungen)

H.3.1 Das Mikrokanonische Ensemble (10 Punkte)

Hier möchten wir einige Schritte in der klassischen Berechnung von $\Omega(E)$ wiederholen. Diese Größe gibt die Oberfläche einer Energieschale im Phasenraum an.

a) Zeigen Sie zunächst, dass für die Delta-Distribution

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \delta(\phi(x))\ \mathrm{d}x = \sum_n \frac{f(x_n)}{|\phi'(x_n)|} \tag{1}$$

gilt, wobei x_n eine Nullstelle der Funktion[1] $\phi(x)$ ist. Die Summe in (1) erstreckt sich also über alle Nullstellen von $\phi(x)$.

(*2 Punkte*)

b) Betrachten Sie die Hamiltonfunktion $H(q,p)$, wobei q und p zwei $3N$-dimensionale Koordinaten des $6N$-dimensionalen Phasenraums sind. Eine Äquienergiefläche[2] hierin ist dann gegeben durch $H(q,p) = E$ für eine Konstante E. Entwickeln Sie die Funktion $H(q,p)$ senkrecht zu ihrer Äquienergiefläche.
Hinweis: Benutzen Sie die mehrdimensionale Taylorentwicklung. Des Weiteren überlegen Sie sich, warum der Gradient in die Richtung der größten Änderung einer Funktion zeigt.

(*1 Punkt*)

c) Berechnen Sie mit Hilfe der obigen Überlegungen $\Omega(E)$ aus

$$\Omega(E) = \int \frac{\mathrm{d}q\ \mathrm{d}p}{h^{3N} N!}\ \delta\left(E - H(q,p)\right)\ . \tag{2}$$

Hinweis: Vergleichen Sie mit den Gleichungen (2.2.4) und (2.2.4′) im Lehrbuch von Schwabl zur statistischen Mechanik.

(*1 Punkt*)

[1] Die Funktion muss hierfür stetig differenzierbar und die Nullstellen einfach sein.
[2] Dies ist eine $6N-1$-dimensionale Hyperfläche und wir nutzen eine sprachliche Analogie zur Äquipotentialfläche der Elektrodynamik.

Nun möchten wir anhand des eindimensionalen harmonischen Oszillators unsere Überlegung zur Äquienergiefläche illustrieren (es sei $N = 1$). Betrachten Sie die Hamiltonfunktion

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 \ . \tag{3}$$

d) Bestimmen Sie die Geometrie einer Äquienergiefläche sowie die Phasenbahn $(q(t), p(t))$ des harmonischen Oszillators.

(2 Punkte)

e) Konstruieren Sie in jedem Punkt der Phasenbahn eine orthogonale Basis, wobei ein Basisvektor senkrecht zur Äquienergiefläche $H(q,p) = E = \text{konst.}$ stehen soll.

(1 Punkt)

Wir betrachten jetzt den Fall $N \gg 1$ und wollen das Volumen innerhalb der Äquienergiefläche berechnen, welches in drei Raumdimensionen durch[3]

$$\bar{\Omega}(E) = \int \frac{\mathrm{d}q \ \mathrm{d}p}{h^{3N} N!} \ \Theta(E - H(q,p)) \tag{4}$$

gegeben ist. Für N klassische, dreidimensionale harmonische Oszillatoren ohne Wechselwirkung lautet die Hamiltonfunktion

$$H(q,p) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{|p_i|^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} |q_i|^2 \right) \ . \tag{5}$$

f) Berechnen Sie $\bar{\Omega}(E)$ indem Sie das Integral in $6N$-dimensionalen Kugelkoordinaten schreiben (vgl. Vorlesung bzw. Abschnitt 2.2.2 im Lehrbuch von Schwabl). Bestimmen Sie anschließend $\Omega(E) = \partial_E \bar{\Omega}(E)$. *(3 Punkte)*

H.3.2 Stirlingsche Formel (3 Punkte)

Im Rahmen der statistischen Physik ist es oft notwendig, Integrale der Form

$$I(N) = \int_a^b \mathrm{e}^{N f(x)} \mathrm{d}x$$

für große N zu approximieren. Hierfür kann häufig die Sattelpunktnäherung verwendet werden:

Sei $f(x)$ eine reelle, analytische Funktion auf dem Intervall $[a,b]$ mit einem globalen Maximum bei $x_0 \in (a,b)$. Für große N gilt

$$I(N) \approx \mathrm{e}^{N f(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{N |f''(x_0)|}}, \qquad \text{mit} \quad f''(x_0) \equiv \left. \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \right|_{x = x_0} . \tag{6}$$

a) Leiten Sie mithilfe der Sattelpunktnäherung die Stirlingsche Formel her:

$$N! \approx \sqrt{2\pi N} N^N \mathrm{e}^{-N} \qquad \text{für} \quad N \to \infty \ .$$

Dabei dürfen Sie die Integraldarstellung der Gammafunktion verwenden:

$$N! = \Gamma(N+1) = \int_0^\infty x^N \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x \ . \tag{7}$$

[3] Hierin bezeichnet Θ die Heaviside-Funktion.