
Theoretische Physik IV (Statistische Physik)

Vorlesung: PD Dr. Stefan Förste

Übungsleitung: M.Sc. Fabian Fischbach

<http://www.th.physik.uni-bonn.de/people/fischbach/ws1819/tp4>

–HAUSAUFGABEN–

Abgabe der Hausaufgaben: Di./Mi. 6./7.11.2018 (in den Übungen)

Besprechung der Hausaufgaben: Di./Mi. 13./14.11.2018 (in den Übungen)

H.4.1 Maxwell-Boltzmann-Verteilung

(12 Punkte)

Wir betrachten eine mikrokanonische Gesamtheit mit Energien im Intervall $[E, E + \Delta]$ (mit kleinem Δ/E), Volumen V und N gleichartigen Teilchen. Diese besitzt die mikrokanonische Zustandssumme $\Omega(E, V, N)$. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein ausgewähltes Teilchen die Energie ϵ_0 besitzt, ist gegeben durch

$$w(\epsilon_0) = \sum_{n : E - \epsilon_0 \leq E_n^R \leq E - \epsilon_0 + \Delta} \frac{1}{\Delta \cdot \Omega(E, V, N)}, \quad (1)$$

wobei E_n^R die Energie-Eigenwerte des Restsystems sind, welches aus $N - 1$ Teilchen besteht und dessen Zustände durch n abgekürzt sind. Es wird über Zustände mit der gezeigten Bedingung summiert.

a) Bestätigen Sie durch kurze Rechnung, dass

$$w(\epsilon_0) = \frac{\Omega(E - \epsilon_0, V, N - 1)}{\Omega(E, V, N)} \quad (2)$$

gilt. (1 Punkt)

Es wurde in der Vorlesung gezeigt, dass für ein ideales Gas mit Teilchen der Masse m die mikrokanonische Zustandssumme durch¹

$$\Omega(E, V, N) = 2\pi m \frac{(2\pi m E)^{3N/2-1}}{N! (\frac{3N}{2} - 1)!} \frac{V^N}{h^{3N}} \quad (3)$$

gegeben ist.

b) Zeigen Sie, dass

$$w(\epsilon_0) \approx \text{const.} \cdot \exp\left(-\frac{3}{2} \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \quad (4)$$

mit $\epsilon := E/N$ gilt. Hierzu entwickeln Sie für $N \gg 1$ und $E \gg \epsilon_0$ die Funktion $f(\epsilon_0) := \log[\Omega(E - \epsilon_0, V, N - 1)]$ um $\epsilon_0 = 0$ bis zur und inklusive der linearen Ordnung. (2 Punkte)

¹Vgl. Gl. (2.2.17) in F. Schwabl, *Statistische Mechanik*, 3. Auflage (Springer).

- c) Für freie, nicht-relativistische Teilchen der Masse m gilt die Energie-Impuls-Relation $\epsilon_0 = \frac{p^2}{2m}$ mit $p := |\vec{p}|$. Wir setzen im Folgenden $W(\vec{p}) \propto w(\epsilon_0(\vec{p}))$ an und schreiben kurz $\beta := 3/(2\epsilon)$.

Zeigen Sie, ausgehend von der Normierungsbedingung $\int_{\mathbb{R}^3} W(\vec{p}) d^3p = 1$, dass die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen mit Impulsbetrag p vorzufinden, wie folgt lautet:²

$$w(p) = 4\pi \left(\frac{\beta}{2\pi m} \right)^{3/2} p^2 \exp \left(-\beta \frac{p^2}{2m} \right) . \quad (6)$$

(2 Punkte)

- d) Bestimmen Sie den wahrscheinlichsten Wert p_{\max} sowie die Erwartungswerte \bar{p} und \bar{p}^2 in Abhängigkeit von $b := \beta/m$. Welche Eigenschaft der Verteilung (6) führt zu $p_{\max} \neq \bar{p}$?

(3 Punkte)

- e) Plotten Sie die Funktion $w(p)$ für alle $b \in \{0.3, 0.5, 0.7, 1.0, 2.0\}$. Für $b = 0.7$ zeichnen Sie p_{\max}, \bar{p} und $\sqrt{\bar{p}^2}$ ein.

(2 Punkte)

- f) Es gilt die kalorische Zustandsgleichung des idealen Gases $\epsilon = \frac{3}{2}k_B T$, welche in der Vorlesung hergeleitet wird und uns erlaubt, ϵ durch die Temperatur T auszudrücken.³ In welcher Größenordnung liegen die zugehörigen Geschwindkeitswerte für die Gasmoleküle von Luft bei einer Raumtemperatur von $T = 290K$?

(2 Punkte)

H.4.2 Spin- $\frac{1}{2}$ -Paramagnet

(10 Punkte)

In dieser Aufgabe möchten wir uns ein System aus Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen anschauen. Das System bestehe aus N Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen in einem Magnetfeld H . Hierbei können die Teilchen jeweils in den zwei Zuständen $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ auftreten.

Der Hamilton-Operator für dieses System ist gegeben durch

$$\hat{\mathcal{H}} = -h \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_i , \quad \text{mit } \hat{\sigma}_i |\uparrow\rangle_i = |\uparrow\rangle_i \text{ und } \hat{\sigma}_i |\downarrow\rangle_i = -|\downarrow\rangle_i . \quad (7)$$

- a) Zunächst möchten wir die Anzahl der Zustände mit der Energie E bestimmen. Berechnen Sie hierzu

$$\Omega(E) = \sum_{(\sigma_1, \dots, \sigma_N) \in \{+1, -1\}^N} \delta \left(E + h \sum_{i=1}^N \sigma_i \right) . \quad (8)$$

Hinweis: Drücken Sie die Delta-Distribution durch ein Integral aus.

(3 Punkte)

²Sie dürfen folgende Identität verwenden:

$$\int_0^\infty x^n \exp(-ax^2) dx = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{2a^{\frac{n+1}{2}}} \quad (5)$$

mit $\Gamma(k + 1/2) = (k - 1/2)(k - 3/2)\dots(3/2)(1/2)\sqrt{\pi}$.

³Es ist übliche Konvention, $\beta = 1/(k_B T)$ zu schreiben, was im vorliegenden Falle äquivalent zu der zuvor gegebenen Definition ist.

Erhalten sollten Sie hierbei ein Integral der Form

$$\sim \int \frac{dk}{2\pi} e^{f(k)} \quad \text{mit } f(k) = ikE + N \log \cos(kh) . \quad (9)$$

- b) Berechnen Sie dieses Integral mit Hilfe der Sattelpunktnäherung (Laplace-Methode). Entwickeln Sie hierfür die Funktion $f(k)$ bis zur zweiten Ordnung um ihr Extremum. Verwenden Sie außerdem $e := \frac{E}{Nh}$.

(3 Punkte)

- c) Berechnen Sie aus der Anzahl der Zustände die Entropie $S = k_B \log \Omega(E)$ des Systems. Berücksichtigen Sie nur die am Ende linearen Terme in N .

(2 Punkte)

- d) Bestimmen Sie aus der Entropie den Ausdruck für die Temperatur $T = (\partial_E S)^{-1}$ des Systems. Diskutieren Sie das Verhalten der Temperatur, indem Sie $E \rightarrow \pm Nh$ und $E \rightarrow 0$ analysieren.

(2 Punkte)