Universität Bonn
Physikalisches Institut
Theoretische Physik

Übungsblatt 5
06.11.2018
WS 18/19

Theoretische Physik IV (Statistische Physik)

Vorlesung: PD Dr. Stefan Förste
Übungsleitung: M.Sc. Fabian Fischbach
`http://www.th.physik.uni-bonn.de/people/fischbach/ws1819/tp4`

–Hausaufgaben–

Abgabe der Hausaufgaben: Di./Mi. 13./14.11.2018 (in den Übungen)
Besprechung der Hausaufgaben: Di./Mi. 20./21.11.2018 (in den Übungen)

H.5.1 Dopplerverbreiterung (4 Punkte)

Auf dem letzten Übungsblatt haben wir die Maxwell-Boltzmann-Verteilung kennengelernt. Als Wahrscheinlichkeitsverteilung der Geschwindigkeit $\vec{v}$ eines Teilchens[1] lautet diese

$$w(\vec{v})\ \mathrm{d}^3 v = \left(\frac{m\beta}{2\pi}\right)^{3/2} \exp\left(-m\beta\frac{\vec{v}^2}{2}\right)\ \mathrm{d}^3 v\ , \tag{1}$$

wobei m die Masse eines jeden der N Teilchen bezeichnet und $\beta = 1/(k_\mathrm{B}T)$ mit der Temperatur T gilt. Als Anwendung wollen wir in dieser Aufgabe die Dopplerverbreiterung eines monochromatisch[2] emittierenden Gases berechnen. Wir nehmen an, dass sich die N Atome zunächst in einem angeregten Zustand befinden und beim Übergang in den Grundzustand Licht der Energie $E_0 = h\nu_0$ emittieren, wobei E_0 sich auf ein bei Emission ruhendes Atom bezieht. Gemäß relativistischem Dopplereffekt gilt für die Frequenz $\nu(v_z)$, die von einem Spektrometer in z-Richtung beobachtet wird, die Beziehung

$$\nu(v_z) = \nu_0\sqrt{\frac{c+v_z}{c-v_z}}\ . \tag{2}$$

Hier bezeichnet v_z die relative Geschwindigkeit zwischen Emitter und (ruhend angenommenem) Spektrometer in z-Richtung und c bezeichnet die Lichtgeschwindigkeit.

a) Wegen $\langle v_z/c\rangle \ll 1$ bei Raumtemperatur genügt es, $\nu(v_z)$ zu linearisieren. Bestimmen Sie in dieser Näherung die funktionale Form der Energieverteilung am Spektrometer. *(2 Punkte)*

b) Bestimmen Sie außerdem den Mittelwert $\langle E\rangle$ der vom Spektrometer beobachteten Energie sowie die mittlere quadratische Abweichung $\Delta E := \sqrt{\langle (E-\langle E\rangle)^2\rangle}$. *(2 Punkte)*

[1] Beachten Sie, dass es hier, im Gegensatz zum vorherigen Übungsblatt, nicht um die Verteilung des *Betrages* geht.

[2] Wir vernachlässigen also zum Beispiel die natürliche Linienbreite, die im Zusammenhang mit der endlichen Lebensdauer angeregter Energieniveaus steht und bei atomaren Vorgängen in einer kleineren Größenordnung als die thermisch bedingte Dopplerbreite bei Raumtemperatur liegt. Auch nehmen wir an, dass die Konzentration des Gases so gering ist, dass die Stoßverbreiterung keine Rolle spielt.

H.5.2 Druckabfall in einer Kammer (6 Punkte)

Als zweite Anwendung der Geschwindigkeitsverteilung wollen wir den Druckabfall einer gasgefüllten Kammer durch ein kleines Loch untersuchen. Das ideale Gas in der Kammer, welche durch einen Quader des Volumens $V = L_x L_y L_z$ beschrieben sei, bestehe zum Zeitpunkt $t = 0$ (Öffnung des Lochs) aus N gleichartigen Teilchen bei einer (konstant gehaltenen) Temperatur T. Die Teilchen entweichen durch ein kleines[3] Loch mit Flächeninhalt f.

a) Wir betrachten für $t > 0$ ein Teilchen der Geschwindigkeit $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ am Ort $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$ innerhalb der Kammer. Welche Bedingung muss gelten, damit das Teilchen zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ entweicht? Machen Sie hierzu auch eine Skizze.[4] (*2 Punkte*)

b) Bestimmen Sie für $t > 0$ die Anzahl $N(t)$ der Teilchen in der Kammer bzw. hieraus den Druck $p(t)$. Nach welcher Zeit ist der Druck um den Faktor $1/e$ abgefallen?
<u>*Hinweis:*</u> Im Limes $\Delta t \to 0$ sollten Sie folgende Differentialgleichung erhalten:

$$\partial_t N(t) = -\frac{f}{V} (2\pi m\beta)^{-1/2} \cdot N(t) \ . \tag{3}$$

(*2 Punkte*)

c) Berechnen Sie nun Beiträge zur mittleren kinetischen Energie $T^{\mathrm{i,a}}_{x,y,z}$ für die Teilchen innerhalb der Kammer und außerhalb der Kammer und vergleichen Sie. Ist das Ergebnis kompatibel mit der Energieerhaltung? (*2 Punkte*)

H.5.3 Exaktheit und Integrabilität von Einsformen (6 Punkte)

In dieser Aufgabe wiederholen wir mathematische Konzepte, die uns im Rahmen der Thermodynamik begegnen werden.

Man betrachte eine glatte Einsform $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i(x_1, ..., x_n)\, \mathrm{d}x_i$, wobei die auftretenden Differentiale $\mathrm{d}x_i$ linear unabhängig seien. Sie heißt *exakt*, falls sie das totale Differential einer glatten Funktion $F(x_1, ..., x_n)$ ist, d. h. falls gilt

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}\, \mathrm{d}x_i \qquad \text{mit} \qquad a_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}. \tag{4}$$

Die Vertauschbarkeit partieller Ableitungen von F gibt eine notwendige Bedingung für die Exaktheit von α (Integrabilitätsbedingung), nämlich dass α *geschlossen* ist:

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \qquad \text{für alle } i, j. \tag{5}$$

Tatsächlich ist (5) auch hinreichend, falls $x_1, ..., x_n$ Koordinaten eines einfach zusammenhängenden Gebietes sind.[5][6] Für exaktes α gilt für beliebige geschlossene, kontrahierbare Wege γ

$$\oint_\gamma \alpha = 0. \tag{6}$$

[3] Der Lochdurchmesser sei groß im Vergleich zum Teilchendurchmesser (z. B. bei Stickstoffmolekülen), jedoch viel kleiner als die Kammerabmessungen $L_{x,y,z}$. Die Kammerwand sei beliebig dünn.

[4] Die Abmessungen $L_{x,y,z}$ seien sehr groß im Vergleich zur typischen Flugdistanz $\sqrt{\langle \vec{v}^2 \rangle}\Delta t$ und wir vernachlässigen Wandeffekte.

[5] Das bedeutet, dass sich jedes Paar von Punkten durch einen Pfad verbinden lässt und sich ferner alle solche Pfade stetig ineinander deformieren lassen. Machen Sie sich dies zeichnerisch an einem Beispiel klar.

[6] Bemerkung: Diese Aussage ist ein Spezialfall des *Poincaré-Lemmas*.

Im thermodynamischen Kontext treten Linienintegrale von Einsformen (z. B. die geleistete Arbeit $\delta A = -p\,\mathrm{d}V$) insbesondere bei einer Abfolge von Gleichgewichtszuständen auf, die durch thermodynamischen Größen wie Druck, Volumen oder Temperatur makroskopisch vollständig charakterisiert sind. Kreisintegrale tauchen entsprechend bei Kreisprozessen auf, in denen ein thermodynamisches System wieder in den Ausgangszustand (abstrakt gesprochen ein Punkt der Zustandsfläche) zurückgeführt wird.

Wir wollen die mathematischen Begriffe an einem einfachen, rein formalen Beispiel illustrieren. Es sei im Folgenden $n = 2$ und $\alpha = x_1 x_2\,\mathrm{d}x_1 + x_1^2\,\mathrm{d}x_2$. Zeigen Sie, dass

a) die Einsform α nicht exakt ist, (*1 Punkt*)

b) dies jedoch auf $x_1^{-1}\alpha$ zutrifft. (*1 Punkt*)

c) Bestimmen Sie eine Stammfunktion $F(x_1, x_2)$ mit $\mathrm{d}F = x_1^{-1}\alpha$. (*1 Punkt*)

Der Faktor x_1^{-1} in diesem Beispiel ist ein *integrierender Faktor*, er macht aus α eine exakte Einsform. Dieser ist nicht unbedingt eindeutig, wie wir nun sehen.

d) Setzen Sie $f\alpha$ als exakt an und bestimmen Sie anhand der Integrabilitätsbedingung die allgemeine Form des integrierenden Faktors f für obiges Beispiel. Wie ergibt sich daraus der zuvor betrachtete Spezialfall? (*3 Punkte*)