Theoretische Physik IV (Statistische Physik)

Vorlesung: PD Dr. Stefan Förste
Übungsleitung: M.Sc. Fabian Fischbach
`http://www.th.physik.uni-bonn.de/people/fischbach/ws1819/tp4`

–Hausaufgaben–

Abgabe der Hausaufgaben: Di./Mi. 27./28.11.2018 (in den Übungen)
Besprechung der Hausaufgaben: Di. 4.12.2018 und Mi. 12.12.2018 (in den Übungen)

H.7.1 Virialsatz in der Quantenstatistik (8 Punkte)

In der Vorlesung wurde der klassische Virialsatz für wechselwirkende Teilchen diskutiert. Diese Aufgabe adressiert nun die Quantenversion.

Betrachten Sie ein Ensemble aus N gleichartigen Teilchen der Masse m, die durch ein Wandpotential V in einem Raumbereich eingeschlossen sind und deren Wechselwirkung durch ein Paarpotential v beschrieben wird. Der Hamilton-Operator laute

$$H = \sum_{n=1}^{N} \frac{\vec{p}_n^2}{2m} + \sum_{n=1}^{N} V(\vec{x}_n) + \sum_{\substack{n,n'=1,\\ n\neq n'}}^{N} v(\vec{x}_n - \vec{x}_{n'}) \tag{1}$$

$$=: \mathcal{T}(\vec{p}_1, ..., \vec{p}_N) + \mathcal{V}(\vec{x}_1, ..., \vec{x}_N). \tag{2}$$

a) Zeigen Sie zunächst

$$[H, \vec{x}_n \cdot \vec{p}_n] = -i\hbar \left(\frac{\vec{p}_n^2}{m} - \vec{x}_n \cdot \vec{\nabla}^{(n)} \mathcal{V}(\vec{x}_1, ..., \vec{x}_N) \right) , \tag{3}$$

wobei wir die Notation $\vec{\nabla}^{(n)} = (\frac{\partial}{\partial x_n^{(1)}}, \frac{\partial}{\partial x_n^{(2)}}, \frac{\partial}{\partial x_n^{(3)}})^{\mathrm{T}}$ und $\vec{x}_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, x_n^{(3)})^{\mathrm{T}}$ benutzen.

(3 Punkte)

b) Nutzen Sie dies, um zu zeigen:

$$2\langle E_{\text{kin}}\rangle - \langle \sum_{n=1}^{N} \vec{x}_n \cdot \vec{\nabla}^{(n)} V(\vec{x}_n)\rangle - \langle \sum_{\substack{n,n'=1,\\ n\neq n'}}^{N} \vec{x}_n \cdot \vec{\nabla}^{(n)} v(\vec{x}_n - \vec{x}_{n'})\rangle = 0 \ . \tag{4}$$

<u>*Hinweis:*</u> Es darf ohne Beweis die Identität $0 = \langle\Psi|\,[H, \vec{x}_n \cdot \vec{p}_n,]\,|\Psi\rangle$ für Energieeigenzustände $|\Psi\rangle$ genutzt werden. Die Dichtematrix des Ensembles sei diagonal in solchen Zuständen.

(3 Punkte)

c) Folgern Sie schließlich

$$2\langle E_{\text{kin}}\rangle - 3PV - \frac{1}{2}\langle \sum_{n\neq m} (\vec{x}_n - \vec{x}_m) \cdot \vec{\nabla} v(\vec{\xi})\Big|_{\vec{\xi}=(\vec{x}_n - \vec{x}_m)}\rangle = 0 \ . \tag{5}$$

(2 Punkte)

H.7.2 Ultrarelativistisches Gas (8 Punkte)

Wir wollen anhand des kanonischen Ensembles die thermodynamischen Eigenschaften eines ultrarelativistischen, klassischen Gases berechnen. Ein solches Gas wird vereinfachend beschrieben durch N gleichartige, masselose Teilchen, welche sich mit Lichtgeschwindigkeit c bewegen. Die Energie-Impuls-Relation und Hamilton-Funktion lauten also

$$\epsilon = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = |p|c \tag{6}$$

$$H = \sum_{i=1}^{N} |p_i|c \; . \tag{7}$$

Wir wollen nun die kanonischen Zustandssumme

$$Z(T,V,N) = \frac{1}{N!\; h^{3N}} \int \exp\left(-\beta \sum_{i=1}^{N} |p_i|c\right) \mathrm{d}^{3N}q \; \mathrm{d}^{3N}p \tag{8}$$

berechnen.

a) Zeigen Sie

$$Z(T,V,N) = \frac{1}{N!} \left(8\pi V \left(\frac{k_\mathrm{B}T}{hc}\right)^3\right)^N \; . \tag{9}$$

<u>*Hinweis:*</u> Die Integraldarstellung der Gammafunktion könnte Ihnen helfen. (*3 Punkte*)

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Stirlingschen Formel die freie Energie F und hieraus den Druck P sowie die Entropie S. Folgern Sie die Zustandsgleichungen dieses Gases:

$$PV = Nk_\mathrm{B}T \tag{10}$$

$$E = 3Nk_\mathrm{B}T. \tag{11}$$

(*4 Punkte*)

c) Berechnen Sie außerdem das chemische Potential μ. (*1 Punkt*)