Theoretische Physik IV (Statistische Physik)

Vorlesung: PD Dr. Stefan Förste
Übungsleitung: M.Sc. Fabian Fischbach
`http://www.th.physik.uni-bonn.de/people/fischbach/ws1819/tp4`

–Hausaufgaben–

Abgabe der Hausaufgaben: Di. 04.12.2018
(in den Übungen bzw. für Mittwochsgruppen in der Vorlesung)
Besprechung der Hausaufgaben: Di./Mi. 11./12.12.2018 (in den Übungen)

H.8.1 Gemisch zweier idealer Gase (8 Punkte)

Wir betrachten ein Gemisch zweier idealer (nicht wechselwirkender) Gase in einem Volumen V. Das Gemisch stehe im Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T. Die Gasteilchenbesitzen die Masse m_1 bzw. m_2.

a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme $Z_\mathrm{K}(T, V, N_1, N_2)$ für zunächst feste Teilchenzahlen N_i. Drücken Sie das Ergebnis durch die thermischen Wellenlängen aus, die durch $\lambda_i = h/\sqrt{2\pi m_i k_\mathrm{B} T}$ definiert sind.

(2 Punkte)

b) Im Folgenden wird auch der Teilchenaustausch mit dem Wärmebad zugelassen. Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme

$$Z_\mathrm{GK}(T, V, \mu_1, \mu_2) = \sum_{N_1=0}^{\infty} \sum_{N_2=0}^{\infty} Z_\mathrm{K}(T, V, N_1, N_2)\, \mathrm{e}^{\beta(\mu_1 N_1 + \mu_2 N_2)} \,, \tag{1}$$

wobei nun jede Teilchensorte i ein eigenes chemisches Potential μ_i besitzt. Drücken Sie ihr Ergebnis durch die Fugazitäten $z_i = \exp(\beta\mu_i)$ aus.

(1 Punkt)

c) Durch geeignete Ableitungen nach den Zustandsvariablen des großkanonischen Potentials

$$\Phi(T, V, \mu_1, \mu_2) = -k_\mathrm{B} T \log Z_\mathrm{GK} \tag{2}$$

berechnen Sie ferner den Druck P und die (mittleren) Teilchenzahlen N_i des Gemisches.

(1 Punkt)

d) Folgern Sie die thermische Zustandsgleichung

$$PV = k_\mathrm{B} T (N_1 + N_2) \,. \tag{3}$$

(1 Punkt)

e) Auf ähnliche Weise berechnen Sie die Entropie S des Gemisches.

(*2 Punkte*)

f) Nutzen Sie Ihre Ergebnisse, um für die innere Energie des Systems

$$E = \Phi + TS + (\mu_1 N_1 + \mu_2 N_2) \tag{4}$$

die Aussage

$$E = \frac{3}{2}(N_1 + N_2) k_\mathrm{B} T \tag{5}$$

zu zeigen.

(*1 Punkt*)

H.8.2 Zustandsvariablen und Ableitungsregeln (8 Punkte)

Wir betrachten ein thermodynamisches System mit Zustandsvariablen x, y und z, welche durch eine Zustandsgleichung

$$F(x, y, z) = 0 \tag{6}$$

in Beziehung stehen. Als solche bestimmt sie x, y und z als implizite Funktionen. Geometrisch betrachtet definiert (6) eine zweidimensionale Zustandsfläche. Ohne zusätzliche Symbole einzuführen schreibt man

$$x = x(y, z), \qquad y = y(x, z) \qquad \text{oder} \qquad z = z(x, y), \tag{7}$$

wenn man eine der Zustandsvariablen als Funktion der anderen beiden betrachtet.

Sei $f(x, y)$ eine physikalische Größe, die als Funktion der Zustandsvariablen x und y gegeben ist. In der Thermodynamik werden bei partiellen Ableitungen häufig die festgehaltenen Größen explizit angegeben. Diese Notation ist hilfreich, wenn man zwischen verschiedenen Sätzen von als unabhängig betrachteten Zustandsvariablen wechselt, aber das Symbol für die physikalische Größe f beibehält. Zum Beispiel schreibt man $(\partial f/\partial x)_z$, wenn f nun als Funktion von x und z betrachtet wird und z beim Ableiten festgehalten wird. Zur Gewöhnung an diese Notation und das Rechnen mit Einsformen (Differentialen) im thermodynamischen Kontext leiten wir ein paar einfache Regeln her.

a) Berechnen Sie die totalen Differentiale der impliziten Funktionen x und y in (7). Leiten Sie hieraus folgende Regeln her:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z} \tag{8}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1. \tag{9}$$

<u>*Hinweis:*</u> Substituieren Sie dy in dx und nutzen Sie die lineare Unabhängigkeit zweier Basiseinsformen auf der zweidimensionalen Zustandsfläche. (*3 Punkte*)

Seien $g(x, y)$, $u(x, y)$ und $v(x, y)$ weitere Funktionen. Wir erinnern uns an die Jacobi-Determinante

$$\left|\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}\right| := \det \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y & \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \\ \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y & \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y . \tag{10}$$

Wegen der mehrdimensionalen Kettenregel haben wir

$$\left|\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\right| \; \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| . \tag{11}$$

Die folgenden Aufgabenteile können mithilfe von Beziehungen der Art (10) und (11) gelöst werden.

b) Zeigen Sie die Relation

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z . \tag{12}$$

<u>*Hinweis*:</u> Betrachten Sie $\left|\frac{\partial(f,z)}{\partial(x,z)}\right|$. *(2 Punkte)*

c) Zeigen Sie außerdem

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z . \tag{13}$$

<u>*Hinweis*:</u> Schreiben Sie den ersten Term auf der rechten Seite mithilfe einer geeigneten Jacobi-Determinante. *(3 Punkte)*