Theoretische Physik IV (Statistische Physik)

Vorlesung: PD Dr. Stefan Förste
Übungsleitung: M.Sc. Fabian Fischbach
`http://www.th.physik.uni-bonn.de/people/fischbach/ws1819/tp4`

–Hausaufgaben–

Abgabe der Hausaufgaben: Di./Mi. 11./12.12.2018 (in den Übungen)
Besprechung der Hausaufgaben: Di./Mi. 18./19.12.2018 (in den Übungen)

H.9.1 Entropie des idealen Gases (9 Punkte)

Wenn für ein System die Entropie als Funktion der extensiven Zustandsvariablen auf Grund einer mikroskopischen Theorie bekannt ist, können mit Hilfe der thermodynamischen Fundamentalbeziehung die Zustandsgleichungen explizit bestimmt werden. In dieser Aufgabe möchten wir den umgekehrten Weg gehen. Dazu betrachten wir die beiden folgenden Zustandsgleichungen eines idealen Gases

$$E = \frac{f}{2} N k_\mathrm{B} T \quad \text{und} \quad PV = N k_\mathrm{B} T \ , \tag{1}$$

welche durch empirische Versuche erhalten worden sind. Dabei bezeichnen wir mit E die innere Energie und mit f die Anzahl der Freiheitsgrade des idealen Gases. Wir werden im Folgenden die Entropie $S(E, V, N)$ bestimmen.

a) Benutzen Sie die differentielle Form der Fundamentalbeziehung

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{T}\mathrm{d}E + \frac{P}{T}\mathrm{d}V - \frac{\mu}{T}\mathrm{d}N \ , \tag{2}$$

um zu zeigen, dass für das ideale Gas bei einer adiabatischen Zustandsänderung, d.h., einer Änderung bei der $\mathrm{d}S = 0$ gilt, mit fester Teilchenzahl

$$PV^{\frac{f+2}{f}} = \text{konst.} \quad \text{und} \quad TV^{\frac{2}{f}} = \text{konst.} \tag{3}$$

gilt.

(3 Punkte)

b) Folgern Sie die Gleichung

$$\mathrm{d}s = \frac{1}{T}\mathrm{d}e + \frac{P}{T}\mathrm{d}v \ , \tag{4}$$

mit $s = \frac{S}{N},\ e = \frac{E}{N},\ v = \frac{V}{N}$ aus der differentiellen Form der Fundamentalbeziehung.
<u>*Hinweis:*</u> Erinnern Sie sich an die Gibbs-Duhem-Relation.

(4 Punkte)

c) Integrieren Sie die in b) gezeigte Gleichung, um zu zeigen, dass die Entropie des idealen Gases durch

$$S(E,V,N) = S_0 \frac{N}{N_0} + N k_{\mathrm{B}} \left\{ \frac{f}{2} \log \frac{E}{E_0} + \log \frac{V}{V_0} - \frac{f+2}{f} \log \frac{N}{N_0} \right\} \tag{5}$$

gegeben ist, wobei $S_0,\ E_0,\ V_0$ und N_0 Integrationskonstanten sind.

(*2 Punkte*)

H.9.2 Energiedichte eines thermodynamischen Systems (7 Punkte)

Gegeben sei für feste Teilchenzahl N die Zustandsgleichung

$$PV = \alpha E \tag{6}$$

wobei α eine positive Konstante ist. Wir betrachten im Folgenden die innere Energie $E = E(T,V)$, den Druck $P = P(T,V)$ und die Entropie $S = S(T,V)$ als Funktionen der Temperatur T und des Volumens V.

a) Benutzen Sie die Maxwell-Relation

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V , \tag{7}$$

um die folgende Differentialgleichung für $E(T,V)$ herzuleiten:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = -\frac{\alpha}{V} E + \frac{\alpha T}{V} \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V . \tag{8}$$

<u>*Hinweis*</u>: Bilden Sie ein geeignetes Differential und vergleichen Sie mit dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik, $\mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V$. (*2 Punkte*)

b) Verifizieren Sie, dass diese Differentialgleichung durch den Ansatz

$$E(T,V) = \frac{1}{V^\alpha}\ \phi(TV^\alpha) \tag{9}$$

gelöst wird, wobei ϕ eine beliebig differenzierbare Funktion ist.[1]

(*1 Punkt*)

c) Zeigen Sie, dass die Entropie von der Form $S = \psi(TV^\alpha)$ ist, wobei die Funktion ψ die Eigenschaft $\phi'(x) = x\ \psi'(x)$ besitzt.[2]

(*1 Punkt*)

d) Wir nehmen nun zusätzlich an, dass die Energiedichte E/V nur von T abhängt. Zeigen Sie, dass in diesem Fall

$$\frac{E}{V} = \sigma T^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \tag{10}$$

gelten muss, wobei σ eine Proportionalitätskonstante ist. Für $\alpha = 1/3$ erhält man daraus das Stefan-Boltzmann-Gesetz

$$\frac{E}{V} = \sigma T^4 \tag{11}$$

für schwarze Strahlung.

(*3 Punkte*)

[1] Ohne Beweis bemerken wir, dass dies auch die allgemeine Lösung der vorliegenden partiellen Differentialgleichung ist.

[2] Auch hier genügt es, den gegebenen Ansatz zu verifizieren.

H.9.3 Thermodynamische Relationen in magnetischen Systemen (5 Punkte)

Gegeben sei ein (homogenes) magnetisches System im thermodynamischen Gleichgewicht, das im Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T stehe. Paare konjugierter Zustandsvariablen sind hier (S, T) und (H, M), wobei M das magnetische Moment des Systems bezeichnet und H ein von äußeren Quellen erzeugtes Magnetfeld darstellt.[3] Man kann ein thermodynamisches Potential $A(T, M)$ einführen, dessen totales Differential

$$\mathrm{d}A = -S\mathrm{d}T + H\mathrm{d}M \tag{12}$$

lautet.[4]

a) Zeigen Sie zunächst die Maxwell-Relation

$$\left(\frac{\partial S}{\partial M}\right)_T = -\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_M . \tag{13}$$

(*1 Punkt*)

In Analogie zu den spezifischen Wärmen eines Fluids führt man die spezifischen Wärmen

$$C_M := T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_M \quad \text{und} \quad C_H := T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_H \tag{14}$$

ein und definiert die isotherme Suszeptibilität

$$\chi_T := \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T \quad \text{sowie} \quad \alpha_H := \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H . \tag{15}$$

Diese Größen genügen der Beziehung

$$C_H - C_M = T\frac{\alpha_H^2}{\chi_T} . \tag{16}$$

b) Beweisen Sie Gleichung (16).
Hinweis: Nutzen Sie die Ergebnisse aus Teilaufgabe a) und Aufgabe H.8.2.

(*4 Punkte*)

[3] Wir beschränken uns auf eine eindimensionale Betrachtung, indem wir die Parallelität von magnetischem Moment und Magnetfeld annehmen. Des Weiteren werden die Teilchenzahl und das Volumen als fest betrachtet.
[4] Daneben gibt es noch andere thermodynamische Potentiale, die von anderen Variablen abängen.