# Theoretische Physik IV (Statistische Physik)

Vorlesung: Prof. Dr. Albrecht Klemm
Übungsleitung: M. Sc. Fabian Fischbach
`http://www.th.physik.uni-bonn.de/people/fischbach/ws1920/tp4/index.php`

–Hausaufgaben–

Abgabe der Hausaufgaben: Di./Mi. 15./16.10.2019 (in den Übungen)
Besprechung der Hausaufgaben: Di./Mi. 22./23.10.2019 (in den Übungen)

## H.1.1 Wahrscheinlichkeitstheorie (1+3+1+2+1+2=10) Punkte

In dieser Aufgabe möchten wir die für die statistische Physik grundlegenden Begriffe aus der Wahrscheinlichkeitstheorie wiederholen. Hierbei betrachten wir sowohl eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung, die *Binomialverteilung*, als auch eine kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung, die *Gaußverteilung*.
Eine Zufallsvariable $X$ ist eine Abbildung, die einem Ereignis $e$ aus der Ereignismenge $E$ einen Wert $x$ aus einer Menge $\Omega$ zuordnet

$$\begin{aligned} X : E &\longrightarrow \Omega \\ e &\longmapsto x\ . \end{aligned} \tag{1}$$

Die Zufallsvariable $x$ kann sowohl eine diskrete als auch eine kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung besitzen, welche wir $W$ nennen

$$\begin{aligned} W : \Omega &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto w(x)\ . \end{aligned} \tag{2}$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung muss hierbei normiert sein[1]

$$\int_\Omega w(x)\ \mathrm{d}x = 1\ . \tag{3}$$

Der Erwartungswert der Zufallsvariablen $X$ ist definiert als

$$\langle X\rangle := \int_\Omega w(x)\cdot x\ \mathrm{d}x\ . \tag{4}$$

Des Weiteren sind die $n$-ten Momente der Wahrscheinlichkeitsverteilung definiert als

$$\mu_n := \langle X^n\rangle := \int_\Omega w(x)\cdot x^n\ \mathrm{d}x\ . \tag{5}$$

Ein Maß für die Schwankung der Wahrscheinlichkeitsverteilung um den Erwartungswert ist gegeben durch das Schwankungsquadrat[2]

$$(\Delta x)^2 := \langle (X-\langle X\rangle)^2\rangle = \langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2\,. \tag{6}$$

[1] Für den Fall einer diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung muss das Integral durch eine entsprechende Summe ersetzt werden.
[2] Machen Sie sich klar, dass die zweite Gleichheit nicht gefordert werden muss, sonders aus der Linearität des Erwartungswertes folgt.

a) Als erste Wahrscheinlichkeitsverteilung möchten wir uns die diskrete *Binomialverteilung* anschauen. Diese gibt an, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, bei einer Abfolge von $N$ unabhängigen Versuchen, welche nur zwei Ergebnisse "Erfolg" oder "Misserfolg" zulassen, genau $k$ mal "Erfolg" zu erzielen. Hierbei ist die Reihenfolge der Ergebnisse nicht von Belang. Sei $0 \leqslant p \leqslant 1$ die Wahrscheinlichkeit für "Erfolg", dann lässt sich die *Binomialverteilung* ausdrücken als

$$B(k;p,N) = \binom{N}{k} p^k \, (1-p)^{N-k} \ , \tag{7}$$

wobei $0 \leqslant k \leqslant N$ ist, d.h. $\Omega = \{0, 1, \cdots, N\}$.

i) Zeigen Sie, dass die *Binomialverteilung* normiert ist.

ii) Berechnen Sie die ersten zwei Momente der *Binomialverteilung*, d.h. $\langle X \rangle$ und $\langle X^2 \rangle$.

iii) Bestimmen Sie das Schwankungsquadrat.

*(1+3+1 Punkte)*

b) Eine der wichtigsten kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen ist die *Gaußverteilung*. Hierbei kann die Zufallsvariable $X$ jede reelle Zahl annehmen, d.h. $\Omega = \mathbb{R}$. Die *Gaußverteilung* wird beschrieben durch

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \, \mathrm{e}^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \ . \tag{8}$$

Wir möchten nun einige Momente dieser Verteilung berechnen.

i) Zeigen Sie, dass folgende Identität gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \ , \tag{9}$$

wobei $a > 0$ gilt.
<u>*Hinweis*:</u> Betrachte das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a(x^2+y^2)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ in Polarkoordinaten.

ii) Berechne mit Hilfe von (9) das Integral

$$Z(J) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2+Jx} \, \mathrm{d}x \ , \tag{10}$$

wobei $J$ eine Hilfsgröße ist.

iii) Bestimme für die *Gaußverteilung* die Größen $\langle X \rangle$, $(\Delta x)^2$, $\langle X^4 \rangle$, $\langle X - \langle X^3 \rangle \rangle$.
<u>*Hinweis*:</u> Man kann diese berechnen, indem man $\frac{\partial^n}{\partial J^n} Z(J)\big|_{J=0}$ mit den Momenten der *Gaußverteilung* in Verbindung bringt.

*(2+1+2 Punkte)*