Theoretische Physik IV (Statistische Physik)

Vorlesung: Prof. Dr. Albrecht Klemm
Übungsleitung: M. Sc. Fabian Fischbach
`http://www.th.physik.uni-bonn.de/people/fischbach/ws1920/tp4/index.php`

–Hausaufgaben–

Abgabe der Hausaufgaben: Mo.-Mi. 04.-06.11.2019 (in den Übungen)
Besprechung der Hausaufgaben: Mo.-Mi. 11.-13.11.2019 (in den Übungen)

H.4.1 Maxwell-Boltzmann-Verteilung (12 Punkte)

Wir betrachten eine mikrokanonische Gesamtheit mit Energien im Intervall $[E, E+\Delta]$ (mit kleinem Δ/E), Volumen V und N gleichartigen Teilchen. Diese besitzt die mikrokanonische Zustandssumme $\Omega(E,V,N)$. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein ausgewähltes Teilchen die Energie ϵ_0 besitzt, ist gegeben durch

$$w(\epsilon_0) = \sum_{n\,:\,E-\epsilon_0 \leq E_n^R \leq E-\epsilon_0+\Delta} \frac{1}{\Delta \cdot \Omega(E,V,N)} \,, \tag{1}$$

wobei E_n^R die Energie-Eigenwerte des Restsystems sind, welches aus $N-1$ Teilchen besteht und dessen Zustände durch n abgekürzt sind. Es wird über Zustände mit der gezeigten Bedingung summiert.

a) Bestätigen Sie durch kurze Rechnung, dass

$$w(\epsilon_0) = \frac{\Omega(E-\epsilon_0, V, N-1)}{\Omega(E,V,N)} \tag{2}$$

gilt. (*1 Punkt*)

Es wird in der Vorlesung gezeigt, dass für ein ideales Gas mit Teilchen der Masse m die mikrokanonische Zustandssumme durch[1]

$$\Omega(E,V,N) = 2\pi m \, \frac{(2\pi m E)^{3N/2-1}}{N!\,(\frac{3N}{2}-1)!} \, \frac{V^N}{h^{3N}} \tag{3}$$

gegeben ist.

b) Zeigen Sie, dass

$$w(\epsilon_0) \approx \text{const.} \cdot \exp\left(-\frac{3}{2}\frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \tag{4}$$

mit $\epsilon := E/N$ gilt. Hierzu entwickeln Sie für $N \gg 1$ und $E \gg \epsilon_0$ die Funktion $f(\epsilon_0) := \log[\Omega(E-\epsilon_0, V, N-1)]$ um $\epsilon_0 = 0$ bis zur und inklusive der linearen Ordnung. (*2 Punkte*)

[1] Vgl. Gl. (2.2.17) in F. Schwabl, *Statistische Mechanik*, 3. Auflage (Springer).

c) Für freie, nicht-relativistische Teilchen der Masse m gilt die Energie-Impuls-Relation $\epsilon_0 = \frac{p^2}{2m}$ mit $p := |\vec{p}|$. Wir setzen im Folgenden $W(\vec{p}) \propto w(\epsilon_0(\vec{p}))$ an und schreiben kurz $\beta := 3/(2\epsilon)$.

Zeigen Sie, ausgehend von der Normierungsbedingung $\int_{\mathbb{R}^3} W(\vec{p})\, \mathrm{d}^3p = 1$, dass die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen mit Impulsbetrag im infinitesimalen Intervall[2] $[p, p + \mathrm{d}p]$ vorzufinden, wie folgt lautet:[3]

$$w(p)\,\mathrm{d}p = 4\pi \left(\frac{\beta}{2\pi m}\right)^{3/2} p^2 \exp\left(-\beta \frac{p^2}{2m}\right) \mathrm{d}p \ . \tag{6}$$

(*2 Punkte*)

d) Bestimmen Sie den wahrscheinlichsten Wert $p_{\max}$ sowie die Erwartungswerte $\bar{p}$ und $\bar{p^2}$ in Abhängigkeit von $b := \beta/m$. Welche Eigenschaft der Verteilung (6) führt zu $p_{\max} \neq \bar{p}$? (*3 Punkte*)

e) Plotten Sie die Funktion $w(p)$ für alle $b \in \{0.3, 0.5, 0.7, 1.0, 2.0\}$. Für $b = 0.7$ zeichnen Sie $p_{\max}, \bar{p}$ und $\sqrt{\bar{p^2}}$ ein. (*2 Punkte*)

f) Es gilt die kalorische Zustandsgleichung des idealen Gases $\epsilon = \frac{3}{2}k_\mathrm{B}T$, welche in der Vorlesung hergeleitet wird und uns erlaubt, ϵ durch die Temperatur T auszudrücken.[4] In welcher Größenordnung liegen die zugehörigen Geschwindkeitswerte für die Gasmoleküle von Luft bei einer Raumtemperatur von $T = 290K$? (*2 Punkte*)

H.4.2 Spin-$\frac{1}{2}$-Paramagnet (10 Punkte)

In dieser Aufgabe möchten wir uns ein System aus Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen anschauen. Das System bestehe aus N Spin-$\frac{1}{2}$ -Teilchen in einem Magnetfeld H. Hierbei können die Teilchen jeweils in den zwei Zuständen $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ auftreten.
Der Hamilton-Operator für dieses System ist gegeben durch

$$\hat{\mathcal{H}} = -h \sum_{i=1}^{N} \hat{\sigma}_i \ , \quad \text{mit } \hat{\sigma}_i \left|\uparrow\right\rangle_i = \left|\uparrow\right\rangle_i \text{ und } \hat{\sigma}_i \left|\downarrow\right\rangle_i = -\left|\downarrow\right\rangle_i \ . \tag{7}$$

a) Zunächst möchten wir die Anzahl der Zustände mit der Energie E bestimmen. Berechnen Sie hierzu

$$\Omega(E) = \sum_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_N)\in\{+1,-1\}^N} \delta\left(E + h\sum_{i=1}^{N} \sigma_i\right) \ . \tag{8}$$

<u>*Hinweis*:</u> Drücken Sie die Delta-Distribution durch ein Integral aus.

(*3 Punkte*)

[2] Anders ausgedrückt bezeichnet $w(p)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte.

[3] Sie dürfen folgende Identität verwenden:

$$\int_0^\infty x^n \exp\left(-ax^2\right)\, \mathrm{d}x = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2a^{\frac{n+1}{2}}} \tag{5}$$

mit $\Gamma(k + 1/2) = (k - 1/2)(k - 3/2)...(3/2)(1/2)\sqrt{\pi}$.

[4] Es ist übliche Konvention, $\beta = 1/(k_\mathrm{B}T)$ zu schreiben, was im vorliegenden Falle äquivalent zu der zuvor gegebenen Definition ist.

Erhalten sollten Sie hierbei ein Integral der Form

$$\sim \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\, \mathrm{e}^{f(k)} \qquad \text{mit } f(k) = ikE + N \log\cos(kh) \ . \tag{9}$$

b) Berechnen Sie dieses Integral mit Hilfe der Sattelpunktnäherung (Laplace-Methode). Entwickeln Sie hierfür die Funktion $f(k)$ bis zur zweiten Ordnung um ihr Extremum. Verwenden Sie außerdem $e := \frac{E}{Nh}$.

(3 Punkte)

c) Berechnen Sie aus der Anzahl der Zustände die Entropie $S = k_\mathrm{B} \log \Omega(E)$ des Systems. Berücksichtigen Sie nur die am Ende linearen Terme in N.

(2 Punkte)

d) Bestimmen Sie aus der Entropie den Ausdruck für die Temperatur $T = (\partial_E S)^{-1}$ des Systems. Diskutieren Sie das Verhalten der Temperatur, indem Sie $E \to \pm Nh$ und $E \to 0$ analysieren.

(2 Punkte)