Universität Bonn
Physikalisches Institut
Theoretische Physik

Übungsblatt 5
05.11.2019
WS 19/20

Theoretische Physik IV (Statistische Physik)

Vorlesung: Prof. Dr. Albrecht Klemm
Übungsleitung: M. Sc. Fabian Fischbach
http://www.th.physik.uni-bonn.de/people/fischbach/ws1920/tp4/index.php

–Hausaufgaben–

Abgabe der Hausaufgaben: Mo.-Mi. 11.-13.11.2019 (in den Übungen)
Besprechung der Hausaufgaben: Mo.-Mi. 18.-20.11.2019 (in den Übungen)

H.5.1 Ensembles harmonischer Oszillatoren (10 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir, wie in Aufgabe H.3.3, ein System aus N unterscheidbaren, quantenmechanischen, harmonischen Oszillatoren, welche ungekoppelt seien und alle die gleiche Kreisfrequenz ω besitzen. Ziel ist es diesmal, an einem konkreten Beispiel kanonischen und mikrokanischen Formalismus zu vergleichen.

a) Gegeben sei ein mikrokanonisches Ensemble fester Gesamtenergie $E = \hbar\omega(\frac{N}{2} + N_\Sigma)$, wobei $N_\Sigma \in \mathbb{N}_0$. Geben Sie einen exakten, kombinatorischen Ausdruck für $\Omega(E)$, d. h. die Anzahl der Mikrozustände, die zur Gesamtenergie E führen, an. (*1 Punkt*)

b) Ein ausgewählter Oszillator $i_0 \in \{1, ..., N\}$ besitze die Energie $E_{i_0} = \hbar\omega(n_{i_0} + \frac{1}{2})$. Wie viele der zuvor enumerierten Zustände genügen dieser zusätzlichen Bedingung? Bestimmen Sie außerdem die Wahrscheinlichkeit $p_{i_0}(n_{i_0})$ im Ensemble der Teilaufgabe a) einen ausgezeichneten Oszillator (i_0) mit der Energie $E_{i_0} = \hbar\omega(n_{i_0} + \frac{1}{2})$ vorzufinden. (*2 Punkte*)

c) Zeigen Sie, dass sich $p_{i_0}(n_{i_0})$ für $N \gg 1$ und $N_\Sigma \gg n_{i_0}$ wie folgt approximieren lässt:

$$p_{i_0}(n_{i_0}) \approx \frac{N}{N + N_\Sigma} \left(\frac{N_\Sigma}{N + N_\Sigma} \right)^{n_{i_0}} . \tag{1}$$

Drücken Sie das Ergebnis auch durch den Parameter $x := \log\left(1 + \frac{N}{N_\Sigma}\right)$ aus. (*2 Punkte*)

Wir wollen das vorherige Resultat nun (in leicht abgewandelter Form) über die Rechnung im kanonischen Ensemble ableiten. Gegeben sei daher nun ein einzelner harmonischer Oszillator im Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T (über das wir nichts weiter voraussetzen).

d) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme $Z(T) := \Sigma_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}$ des Ein-Oszillator-Systems, wobei $\beta := (k_\mathrm{B}T)^{-1}$ gesetzt wurde. Die Summation erstreckt sich über die Oszillatorzustände $|n\rangle$ mit Energie E_n. (*1 Punkt*)

e) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit $p(n)$ an, das System im Oszillatorzustand $|n\rangle$ zu finden. (*1 Punkt*)

f) Zeigen Sie, dass die Normierungseigenschaft $\Sigma_{n=0}^{\infty} p(n) = 1$ vorliegt. (*1 Punkt*)

g) Welche Beziehung muss zwischen den Parametern x und T gelten, um das Ergebnis aus Teilaufgabe c) zu reproduzieren? *(2 Punkte)*

An diesem Beispiel haben wir also gesehen, wie miteinander verträgliche statistische bzw. Wahrscheinlichkeitsaussagen für ein kleines Teilsystem prinzipiell sowohl im kanonischen als auch im mikrokanischen Formalismus getroffen werden können.

H.5.2 Polymer-Modell (9 Punkte)

Wir beschreiben ein Polymer idealisiert durch eine lineare Kette von N Gliedern, welche je einen knickbaren Abschnitt besitzen. Die mikroskopischen Eigenschaften der Kette seien dabei wie folgt charakterisiert:

$$\text{Energie eines Kettengliedes:} \quad \begin{cases} \epsilon_- & \text{(ungeknickt)} \\ \epsilon_\wedge & \text{(geknickt)} \end{cases} \tag{2}$$

$$\text{Länge eines Kettengliedes:} \quad \begin{cases} \ell_- & \text{(ungeknickt)} \\ \ell_\wedge < \ell_- & \text{(geknickt)} \end{cases} . \tag{3}$$

a) Berechnen Sie für festgehaltene Länge L die kanonische Zustandssumme

$$Z_\mathrm{K}(T, L, N) = \sum_{\text{Zustände } n} e^{-\beta E_n} . \tag{4}$$

Hinweis: Beachten Sie, dass L, N und die Zahl der geknickten Glieder $n_\wedge$ nicht unabhängig sind und deshalb nur über Mikrozustände summiert wird, die der entsprechenden Relation genügen.

(3 Punkte)

b) Die freie Energie ist durch

$$F(T, L, N) := -k_\mathrm{B} T \log Z_\mathrm{K} \tag{5}$$

definiert. Begründen Sie durch Betrachtung des Differentials von F, dass die Kraft K, die auf die Kette wirkt, durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$K = -\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)_{T,N} . \tag{6}$$

Hinweis: Vergleichen Sie mit dem allgemeinen Ergebnis $\mathrm{d}F(T, V, N) = -S_\mathrm{K}\, \mathrm{d}T - p\, \mathrm{d}V + \mu\, \mathrm{d}N$, wobei der letzte Term nur der Vollständigkeit halber aufgeführt wurde. Hier wird keine lange Rechnung erwartet. Das Vorzeichen ist Konvention.

(3 Punkte)

c) Bestimmen Sie mit dem Ergebnis (6) die Kraft $K(T, L, N)$. Gehen Sie dabei vom Grenzfall $N, n_\wedge \gg 1$ aus und schreiben Sie K als Funktion von T, L und N, wobei Sie alle Koeffizienten durch die mikroskopischen Parameter ausdrücken.
Hinweis: Verwenden Sie die grobe Näherung $\log x! \approx x \log x$ für $x \gg 1$.

(3 Punkte)