Universität Bonn
Physikalisches Institut
Theoretische Physik

Übungsblatt 8
26.11.2019
WS 19/20

Theoretische Physik IV (Statistische Physik)

Vorlesung: Prof. Dr. Albrecht Klemm
Übungsleitung: M. Sc. Fabian Fischbach
http://www.th.physik.uni-bonn.de/people/fischbach/ws1920/tp4/index.php

–Hausaufgaben–

Abgabe der Hausaufgaben: Mo./Di. 2./3.12.2019 (in den Übungen/Vorlesung)[1]
Besprechung der Hausaufgaben: Mo.-Mi. 9.-11.12.2019 (in den Übungen)

H.8.1 Entropie des idealen Gases (9 Punkte)

Wenn für ein System die Entropie als Funktion der extensiven Zustandsvariablen auf Grund einer mikroskopischen Theorie bekannt ist, können mit Hilfe der thermodynamischen Fundamentalbeziehung die Zustandsgleichungen explizit bestimmt werden. In dieser Aufgabe möchten wir den umgekehrten Weg gehen. Dazu betrachten wir die beiden folgenden Zustandsgleichungen eines idealen Gases

$$E = \frac{f}{2} N k_{\mathrm{B}} T \quad \text{und} \quad PV = N k_{\mathrm{B}} T \;, \tag{1}$$

welche durch empirische Versuche erhalten worden sind. Dabei bezeichnen wir mit E die innere Energie und mit f die Anzahl der Freiheitsgrade des idealen Gases. Wir werden im Folgenden die Entropie $S(E, V, N)$ bestimmen.

a) Benutzen Sie die differentielle Form der Fundamentalbeziehung,

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{T}\mathrm{d}E + \frac{P}{T}\mathrm{d}V - \frac{\mu}{T}\mathrm{d}N \;, \tag{2}$$

um zu zeigen, dass für das ideale Gas bei einer adiabatischen Zustandsänderung, d.h., einer Änderung mit $\mathrm{d}S = 0$ (die Teilchenzahl N sei fest), folgende Beziehungen gelten:

$$PV^{\frac{f+2}{f}} = \text{konst.} \quad \text{und} \quad TV^{\frac{2}{f}} = \text{konst.} \tag{3}$$

(3 Punkte)

b) Folgern Sie die Gleichung

$$\mathrm{d}s = \frac{1}{T}\mathrm{d}e + \frac{P}{T}\mathrm{d}v \;, \tag{4}$$

[1] Wegen des Dies Academicus fallen die Mittwochsübungen am 4. Dezember 2019 (vorerst ersatzlos) aus. Betroffene Studierende geben ihre Hausaufgaben (Übungsblatt 8) bitte am Dienstag, den 3. Dezember 2019 in der Vorlesung in bereitgelegte Mappen ab und können an den Montags- und Dienstagsübungen am 2. und 3. Dezember teilnehmen (solange der Platz reicht). Sofern keine individuelle Vereinbarung mit dem jeweiligen Tutor der Mittwochsübungen getroffen wurde, erhalten Studierende der Mittwochsgruppen ihre korrigierten Hausaufgaben in der nächsten regulären Mittwochsübung (11. Dezember) zurück. Sofern die Teilnehmer der Mittwochsübungen dies wünschen und Bedarf besteht, kann eine Besprechung von Übungsblatt 7 (oder Teilen hiervon) auch noch am 11. Dezember nachgeholt werden.

mit $s = \frac{S}{N},\ e = \frac{E}{N},\ v = \frac{V}{N}$ aus der differentiellen Form der Fundamentalbeziehung.
<u>*Hinweis:*</u> Erinnern Sie sich an die Gibbs-Duhem-Relation.

(*4 Punkte*)

c) Integrieren Sie die in b) gezeigte Gleichung, um zu zeigen, dass die Entropie des idealen Gases durch

$$S(E,V,N) = S_0 \frac{N}{N_0} + N k_{\mathrm{B}} \left\{ \frac{f}{2} \log \frac{E}{E_0} + \log \frac{V}{V_0} - \frac{f+2}{2} \log \frac{N}{N_0} \right\} \tag{5}$$

gegeben ist, wobei $S_0,\ E_0,\ V_0$ und N_0 Integrationskonstanten sind.

(*2 Punkte*)

H.8.2 Energiedichte eines thermodynamischen Systems (7 Punkte)

Gegeben sei für feste Teilchenzahl N die Zustandsgleichung

$$PV = \alpha E \tag{6}$$

wobei α eine positive Konstante ist. Wir betrachten im Folgenden die innere Energie $E = E(T,V)$, den Druck $P = P(T,V)$ und die Entropie $S = S(T,V)$ als Funktionen der Temperatur T und des Volumens V.

a) Benutzen Sie die Maxwell-Relation

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \ , \tag{7}$$

um die folgende Differentialgleichung für $E(T,V)$ herzuleiten:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = -\frac{\alpha}{V} E + \frac{\alpha T}{V} \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V \ . \tag{8}$$

<u>*Hinweis:*</u> Bilden Sie ein geeignetes Differential und vergleichen Sie mit dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik, $\mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V$. (*2 Punkte*)

b) Verifizieren Sie, dass diese Differentialgleichung durch den Ansatz

$$E(T,V) = \frac{1}{V^\alpha}\ \phi(TV^\alpha) \tag{9}$$

gelöst wird, wobei ϕ eine beliebig differenzierbare Funktion ist.[2]

(*1 Punkt*)

c) Zeigen Sie, dass die Entropie von der Form $S = \psi(TV^\alpha)$ ist, wobei die Funktion ψ die Eigenschaft $\phi'(x) = x\ \psi'(x)$ besitzt.[3]

(*1 Punkt*)

[2] Ohne Beweis bemerken wir, dass dies auch die allgemeine Lösung der vorliegenden partiellen Differentialgleichung ist.

[3] Auch hier genügt es, den gegebenen Ansatz zu verifizieren.

d) Wir nehmen nun zusätzlich an, dass die Energiedichte E/V nur von T abhängt. Zeigen Sie, dass in diesem Fall

$$\frac{E}{V} = \sigma T^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \tag{10}$$

gelten muss, wobei σ eine Proportionalitätskonstante ist. Für $\alpha = 1/3$ erhält man daraus das Stefan-Boltzmann-Gesetz

$$\frac{E}{V} = \sigma T^4 \tag{11}$$

für schwarze Strahlung.

(3 Punkte)