Theoretische Physik IV (Statistische Physik)

Vorlesung: Prof. Dr. Albrecht Klemm
Übungsleitung: M. Sc. Fabian Fischbach

`http://www.th.physik.uni-bonn.de/people/fischbach/ws1920/tp4/index.php`

–Hausaufgaben–

Abgabe der Hausaufgaben: Mo.-Mi. 9.-11.12.2019 (in den Übungen)
Besprechung der Hausaufgaben: Mo.-Mi. 16.-18.12.2019 (in den Übungen)

H.9.1 Joule-Thomson-Prozess (10 Punkte)

Als Joule-Thomson-Prozess wird, wie in der Vorlesung besprochen, die adiabatische, gedrosselte Expansion eines Gases bezeichnet. Der Joule-Thomson-Koeffizient gibt dabei an, ob und wie sich die Temperatur mit dem Druck bei fester Enthalpie ändert.

a) Zeigen Sie, dass die Enthalpie im Anfangszustand (H_1) gleich derjenigen im Endzustand (H_2) ist. (*1 Punkt*)

b) Zeigen Sie, dass für den Joule-Thomson-Koeffizient Folgendes gilt:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = \frac{V}{C_P}(T\alpha - 1) \ . \tag{1}$$

Hierbei ist C_P die isobare Wärmekapazität des Gases und α der thermische Ausdehungskoeffizient. Beweisen Sie dabei ggf. benutzte Maxwell-Relationen (unter Konstruktion eines geeigneten thermodynamischen Potentials), benennen Sie benutzte Ableitungsregeln (i. S. v. H.7.1) und begründen Sie die Zwischenschritte. (*3 Punkte*)

c) Berechnen Sie den Joule-Thomson-Koeffizient für ein ideales Gas. Wie verändert sich die Temparatur beim Joule-Thomson-Prozess ($(V_1, P_1) \to (V_2, P_2)$ mit $P_1 > P_2$)? (*1 Punkt*)

d) Berechnen Sie den thermischen Ausdehungskoeffizienten $\alpha(T, v)$ eines Gases, das der van-der-Waals-Zustandsgleichung

$$P = \frac{k_B T}{v - b} - \frac{a}{v^2} \tag{2}$$

genügt ($a, b > 0$ sind Stoffkonstanten und $v := V/N > b$). (*1 Punkt*)

e) Welcher Bedingung muss die Temperatur T genügen, damit der Joule-Thomson-Koeffizient für das van-der-Waals-Gas positiv ist?
Hinweis: Drücken Sie $\alpha(\tau, \xi)T(\tau)$ als Funktion der dimensionslosen Parameter $\xi := v/b - 1 > 0$ und $\tau := T/T_{\text{inv}} > 0$ (mit $T_{\text{inv}} := 2a/(bk_B)$) aus und studieren Sie zunächst das Verhalten für hohe Temperaturen. (*2 Punkte*)

f) Zeigen Sie, dass für die Inversionskurve, eine Teilmenge der Zustandsfläche definiert durch $\alpha \overset{!}{=} T^{-1}$, im Falle eines van-der-Waals-Gases folgende Identität gilt:

$$P = \frac{2a}{bv} - \frac{3a}{v^2} \,. \tag{3}$$

(*2 Punkte*)

H.9.2 Heizen eines Raumes[1] (10 Punkte)

Ein Raum mit einem Volumen V soll von $T_1 = 0\,°\mathrm{C}$ auf $T_2 = 20\,°\mathrm{C}$ erwärmt werden. Wir betrachten zunächst den isobaren Vorgang, d.h. indem während der Erwärmung Luftmoleküle entweichen, bleibt der Druck gleich dem Außendruck $P_0 \approx 1000\,\mathrm{hPa} = 1 \times 10^5\,\mathrm{N\,m^{-2}}$. Wir nehmen an, dass die Luft (hauptsächlich O_2 und N_2) als ideales Gas zweiatomiger Moleküle betrachtet werden kann. Wie man leicht zeigen kann, ist die isobare und isochore Wärmekapazität bei typischen Raumtemperaturen dann durch

$$C_P = \frac{7}{2} N k_\mathrm{B} \,, \quad \text{bzw.} \quad C_V = \frac{5}{2} N k_\mathrm{B} \,, \tag{4}$$

wobei N die Teilchenzahl ist, gegeben.

a) Zeigen Sie, dass die für die isobare Erwärmung von $T_1 = 0\,°\mathrm{C}$ auf $T_2 = 20\,°\mathrm{C}$ erforderliche Wärmemenge Q_P durch

$$Q_P = \frac{7}{2} N_1 k_\mathrm{B} T_1 \log\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \tag{5}$$

gegeben ist, wobei N_1 die Teilchenzahl im Anfangszustand ist. [2]

(*3 Punkte*)

b) Überprüfen Sie, dass für kleine Temperaturdifferenzen $\frac{T_2 - T_1}{T_1} \ll 1$ die Näherungsformel

$$Q_P = \frac{7}{2} N_1 k_\mathrm{B} (T_2 - T_1) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{T_2 - T_1}{T_1}\right)^2\right) \tag{6}$$

gilt.

(*1 Punkt*)

c) Das Volumen des Raumes sei $V = vV_0$, wobei $V_0 = 1\,\mathrm{m}^3$. Berechnen Sie die für die Erwärmung von $T_1 = 0\,°\mathrm{C}$ auf $T_2 = 20\,°\mathrm{C}$ benötigte Wärmemenge.

(*1 Punkt*)

d) Betrachten Sie jetzt die Erwärmung eines hermetisch abgeschlossenen Raumes mit Volumen V, d.h. jetzt bleibt bei der Erwärmung die Teilchenzahl $N = N_1$ konstant. Berechnen Sie die benötigte Wärmemenge Q_N auch in diesem Fall.

(*1 Punkt*)

---

[1] A. Sommerfeld: *Vorlesungen über Theoretische Physik*, Bd. V: *Thermodynamik und Statistik*, (Harri Deutsch, Thun 1987)

[2] Nehmen Sie näherungsweise an, dass $C_{P,V} := T(\frac{\partial S}{\partial T})_{P,V} \approx T(\frac{\partial S}{\partial T})_{P,N} = C_P$, Sie also einfach die gegebene (wie üblich bei konstantem N definierte) isobare Wärmekapazität nutzen können.

e) Stellen Sie die Größe $\Delta Q(t) = \frac{Q_P - Q_N}{Q_0}$ mit $Q_0 = N_1 k_\mathrm{B} T_1$ in Abhängigkeit von $t = \frac{T_2}{T_1}$ graphisch dar. Bestimmen Sie den Wert $t_0 > 1$ wo $\Delta Q(t_0) = 0$.

(*2 Punkte*)

f) Auf welche Temperatur T_2 müsste man den Raum heizen, damit isobares Heizen sinnvoller wäre.

(*0.5 Punkte*)

g) Wie viel Energie pro Kubikmeter spart man, falls man isoliert erwärmt?

(*0.5 Punkte*)

h) Im Bereich $1 < t < t_0$ ist es also günstiger zuerst in einem abgeschlossenen Raum zu erwärmen und dann bei der Endtemperatur T_2 kurz den Druck auszugleichen. Wie groß ist im Übrigen die relative Drückerhöhung bei der Erwärmung in einem abgeschlossenen Raum?

(*1 Punkt*)

Beachten Sie, dass wir bei all unseren Rechnungen vernachlässigt haben, dass sich die Wände des Raumes mit aufheizen.

H.9.3 Der Otto-Zyklus (6 Punkte)

Der Otto-Zyklus ist in Abbildung 1 im P-V-Diagramm gezeigt. Die vier Schritte sind:

- adiabatische Komprimierung,
- isochore Erwärmung,
- adiabatische Expansion und
- isochore Abkühlung.

a) Bestimmen Sie die Arbeit und den Wärmetransfer in jedem Schritt unter der Annahme, dass das Arbeitsmedium ein ideales Gas sei.

(*4 Punkte*)

b) Zeigen Sie unter Verwendung der Ergebnisse aus Teil a), dass der Wirkungsgrad durch

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_\mathrm{B}}{V_\mathrm{A}}\right)^{\kappa-1}$$

gegeben ist, wobei $\kappa = \frac{f+2}{f}$ der Adiabatenexponent des idealen Gases ist.

(*2 Punkte*)

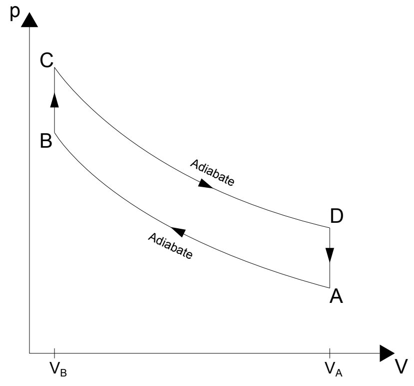

Abbildung 1: Der Otto-Kreisprozess im P-V-Diagram.