
Theoretische Physik IV (Statistische Physik)

Vorlesung: Prof. Dr. Albrecht Klemm

Übungsleitung: M. Sc. Fabian Fischbach

<http://www.th.physik.uni-bonn.de/people/fischbach/ws1920/tp4/index.php>

–HAUSAUFGABEN–

Abgabe der Hausaufgaben: Mo.-Mi. 06.-08.01.2020 (in den Übungen)

Besprechung der Hausaufgaben: Mo.-Mi. 13.-15.01.2020 (in den Übungen)

H.11.1 Dampfgleichgewicht im Zweikomponentensystem (8 Punkte)

Zunächst betrachten wir lediglich eine ideale Mischung aus dem idealen Gas 1 (N_1 Teilchen) und dem idealen Gas 2 (N_2 Teilchen) im Volumen V bei Temperatur T und Gesamtdruck P . Im Bezug auf die gesamte Gasteilchenzahl $N = N_1 + N_2$ definiert man Konzentrationen $c_i = N_i/N$ und die sogenannten Partialdrücke $P_i = c_i P$. Jede Gassorte erfüllt separat die Zustandsgleichung eines idealen Gases

$$P_i V = N_i k_B T \quad \text{und es gilt} \quad \sum_i P_i = P, \quad (1)$$

d. h. das sogenannte Dalton-Gesetz: Die Summe der Partialdrücke gibt den Gesamtdruck.¹ Die chemischen Potentiale der beiden Gase nehmen außerdem folgenden Form an:

$$\mu_i(c_i, P, T) = \mu_{i,T}(T) + k_B T \log(c_i P). \quad (2)$$

a) Beweisen Sie die beiden Identitäten in (1).

Hinweis: Sie dürfen hier und im Folgenden Ihre Ergebnisse aus Aufgabe H.7.1. verwenden. (2 Punkte)

b) Zeigen Sie auch (2). (1 Punkt)

Im Folgenden wollen wir untersuchen, welchen Einfluss ein zweites Gas (Substanz 2) auf das Gas-Flüssigkeits-Gleichgewicht einer gegebenen Substanz 1 hat. Es sei angenommen, dass sich Substanz 2 *nicht* in der homogenen Flüssigkeit 1 (mit N_f Teilchen im Volumen V_f) löse und *ausschließlich* in der Gasphase vorliegt. Das Gesamtsystem befinde sich bei der Temperatur T im Gleichgewicht und die Gasgrößen seien weiterhin wie oben bezeichnet.

Es bezeichne ferner $\Delta P_1 = P_1(P) - P_{1,0}$ die Differenz aus dem Partialdruck $P_1(P)$ im Falle, dass $P = P_1 + P_2$ als Gesamtdruck des binären Gasgemischs auf die Flüssigkeit wirkt und dem Partialdruck $P_{1,0}$ im Falle, dass nur Gas 1 über der Flüssigkeit vorliegt. In letzterem Falle ist das System also auf den aus Übung H.10.1 bekannten, einkomponentigen Fall reduziert und $P_{1,0} = P_{1,0}(T)$ ist der Druck gemäß der Dampfdruckkurve für die Substanz 1.

¹Bemerkung: Tatsächlich gelten die Gleichungen (1) auch für ideale Molekülgase, die innere Freiheitsgrade wie Vibrations- und Rotationsmodi besitzen.

- c) Zeigen Sie, dass sich der Partialdruck von Gas 1 (dem Dampf) wie folgt mit dem Gesamtdruck P ändert:

$$\left(\frac{\partial \log P_1}{\partial P} \right)_T = \frac{V_f}{N_f} \frac{1}{k_B T} \quad (3)$$

Steigt oder fällt die Teilchendichte $n_1 = N_1/V$ des Dampfes mit dem Gesamtdruck P (bei fester Temperatur T)? (3 Punkte)

- d) Nehmen Sie nun zusätzlich an, dass die Flüssigkeit inkompressibel sei. Integrieren Sie (3) und bestimmen Sie die (klein angenommene) relative Differenz $\Delta P_1/P_{1,0}(T)$ näherungsweise. (2 Punkte)

H.11.2 Schwankungsquadrate in der Quantenstatistik (4 Punkte)

Wir betrachten ein ideales Quantengas bei der Temperatur T . Die Teilchenzahl im Quantenzustand p werde mit n_p bezeichnet, die Energie in diesem Zustand mit ϵ_p . Berechnen Sie das Schwankungsquadrat $\langle n_p^2 \rangle - \langle n_p \rangle^2$ sowohl für die Bose-Einstein-Statistik (Bosonen) als auch für die Fermi-Dirac-Statistik (Fermionen).

H.11.3 Entropie eines idealen Quantengases (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Entropie eines idealen Bose-(Fermi-)Gases dargestellt werden kann als

$$S = k_B \sum_p [-\langle n_p \rangle \log \langle n_p \rangle \pm (1 \pm \langle n_p \rangle) \log(1 \pm \langle n_p \rangle)] , \quad (4)$$

wobei das obere Vorzeichen für den bosonischen und das untere für den fermionischen Fall gilt.

H.11.4 Elektronengas am Nullpunkt (4 Punkte)

Wir betrachten ein ideales Quantengas aus N Elektronen in einem Volumen V am absoluten Temperatur-Nullpunkt.

- a) Berechnen Sie die Fermienergie ϵ_F dieses Gases. (1 Punkt)
- b) Berechnen Sie die mittlere Energie E dieses Gases. (1 Punkt)
- c) Drücken Sie die mittlere Energie E als Funktion von ϵ_F und N aus. (1 Punkt)
- d) Warum ist die Energie pro Teilchen E/N hier keine aussagekräftige Größe? (1 Punkt)

H.11.5 Weißer Zwerg

(13 Punkte)

Als weißen Zwerg bezeichnet man einen Stern in einer der möglichen Endphasen der stellaren Evolution. In einem einfachen Modell besteht er aus einem nicht wechselwirkenden Elektronengas und einem Ionenhintergrund, der nur für die Ladungsneutralität und den Zusammenhalt des Sternes durch die Gravitation sorgt. Die Elektronendichte beträgt typischerweise $n = N/V = 10^{30}/\text{cm}^3$ und die Masse $M = 10^{30}$ kg. Wegen der hohen Dichte bewegt sich ein großer Teil der Elektronen relativistisch, es gilt also die Energie-Impuls-Beziehung $\epsilon(p) = \sqrt{(mc^2)^2 + p^2c^2}$.

- (a) Berechnen Sie den Fermi-Impuls $p_F(n)$ des Elektronengases in Abhängigkeit der Elektronendichte n . Schätzen Sie numerisch ab, oberhalb welcher Dichte n_{rel} sich die Elektronen an der Fermi-Kante relativistisch² bewegen. (3 Punkte)
- (b) Die Temperatur eines weißen Zwerges beträgt etwa 10^7 Kelvin. Berechnen Sie die Fermi-Energie ϵ_F des Elektronensystems für die oben angegebene Dichte n numerisch und zeigen Sie, dass $\epsilon_F \gg k_B T$ erfüllt ist. Deshalb wird in den folgenden Aufgabenteilen die Näherung $T = 0$ verwendet. (1 Punkt)
- (c) Berechnen Sie die innere Energie³ $U(R)$ in Abhängigkeit des Radius⁴ R des weißen Zwerges, zuerst für den nichtrelativistischen ($p_F \ll mc$) und anschließend für den ultrarelativistischen Fall ($p_F \gg mc$). Verwenden Sie dabei die folgenden Energie-Impuls-Beziehungen:

$$\begin{aligned} \text{nichtrelativistisch:} \quad \epsilon(p) &= mc^2 + \frac{p^2}{2m} \\ \text{ultrarelativistisch:} \quad \epsilon(p) &= cp . \end{aligned}$$

(5 Punkte)

- (d) Berechnen Sie hieraus den Druck⁵ $P = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_N$ des Elektronensystems für die beiden Fälle. Dieser Druck wird auch Pauli-Druck oder Entartungsdruck genannt. (1 Punkt)
- (e) Betrachten Sie nun die Gesamtenergie $E(R) := U(R) + E_{\text{Grav.}}(R)$ des Sterns, wobei $E_{\text{Grav.}}(R) = -GM^2/R$ sei. Skizzieren Sie in einem Diagramm $E(R)$ für kleine und für große Sternradien (ultrarelativistisches bzw. nichtrelativistisches Regime). Was ist die Bedingung an $E(R)$, dass ein Radius existiert, bei dem der Stern stabil ist (d. h. nicht kollabiert)? Zeigen Sie, dass der weiße Zwerg für Massen größer als eine kritische Masse M_c nicht stabil sein kann. Der Stern stürzt dann in sich zusammen. Bestimmen Sie diese Masse M_c . (3 Punkte)

Hinweis: Sie können mit folgenden Größen rechnen:

Plancksches Wirkungsquantum:	$\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ kg m}^2/\text{s}$
Boltzmann-Konstante:	$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
Elektronenmasse:	$m = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Lichtgeschwindigkeit:	$c = 3.00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

²Hierbei können Sie vereinfachend $p_F > mc$ ansetzen.

³Wir reservieren das Symbol E in dieser Aufgabe für die Gesamtenergie inklusiver der Gravitationsenergie.

⁴Wir gehen von einer Kugelgestalt des Sterns aus. Substituieren Sie den üblichen Volumenfaktor $V = \frac{4\pi}{3} R^3$.

⁵Beachten Sie, dass wir $F = U - TS$ mit $T = 0$ nutzen.