Universität Bonn
Physikalisches Institut
Theoretische Physik

Übungsblatt 12
07.01.2020
WS 19/20

Theoretische Physik IV (Statistische Physik)

Vorlesung: Prof. Dr. Albrecht Klemm
Übungsleitung: M. Sc. Fabian Fischbach
`http://www.th.physik.uni-bonn.de/people/fischbach/ws1920/tp4/index.php`

–Hausaufgaben–

Abgabe der Hausaufgaben: Mo.-Mi. 13.-15.01.2020 (in den Übungen)
Besprechung der Hausaufgaben: Mo.-Mi. 20.-22.01.2020 (in den Übungen)

H.12.1 Zustandsdichte und thermodynamische Größen (8 Punkte)

Die Zustandsdichte ist definiert durch[1]

$$\nu(\varepsilon) = \frac{g_J V}{(2\pi\hbar)^3} \int \mathrm{d}^3p \; \delta\left(\varepsilon - \varepsilon_{\vec{p}}\right) \; . \tag{1}$$

Somit gilt für eine Funktion f, die nur von der Einteilchenenergie $\varepsilon_{\vec{p}}$ abhängt

$$\int \mathrm{d}^3p \; f(\varepsilon_{\vec{p}}) = \int \mathrm{d}\varepsilon \int \mathrm{d}^3p \; f(\varepsilon) \; \delta\left(\varepsilon - \varepsilon_{\vec{p}}\right) = \frac{(2\pi\hbar)^3}{g_J V} \int \mathrm{d}\varepsilon \; \nu(\varepsilon) f(\varepsilon) \; . \tag{2}$$

a) Zeigen Sie, dass für das ideale Fermi-Gas gilt

$$\nu_I(\varepsilon) = \frac{3}{2} N \varepsilon_F^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\varepsilon} \quad \text{mit} \quad \varepsilon_F = \left(\frac{N}{V}\frac{6\pi^2}{g_J}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m} \; . \tag{3}$$

<u>*Hinweis:*</u> Verwenden Sie dabei

$$\delta(f(x)) = \sum_{\{i | f(x_i)=0, f'(x_i)\neq 0\}} \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i) \; . \tag{4}$$

(*2 Punkte*)

Für die Erwartungswerte der Teilchenzahl und Energie gilt bei allgemeiner Zustandsdichte $\nu(\varepsilon)$

$$N = \int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon \; \nu(\varepsilon) n(\varepsilon) \; , \quad E = \int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon \; \nu(\varepsilon) n(\varepsilon) \varepsilon \; , \tag{5}$$

wobei

$$n(\varepsilon) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{\varepsilon - \mu}{k_\mathrm{B} T}} + 1} \tag{6}$$

[1] Hierin ist g_J ein zu Spin- oder Drehimpulszuständen gehöriger Entartungsfaktor. Verallgemeinerungen zu Einteilchenenergien, die nicht nur vom Impuls $\vec{p}$ abhängen, sind offensichtlich.

die Fermi-Verteilungsfunktion ist. Die Fermi-Energie ist gegeben durch die maximale Einteilchenenergie der besetzten Zustände bei $T = 0$, d.h.

$$N = \int_0^{\varepsilon_F} \mathrm{d}\varepsilon\ \nu(\varepsilon)\ . \tag{7}$$

In der Vorlesung wird gezeigt, dass für niedrige Temperaturen näherungsweise

$$\int_0^{\infty} \mathrm{d}\varepsilon\ n(\varepsilon) f(\varepsilon) = \int_0^{\mu} \mathrm{d}\varepsilon\ f(\varepsilon) + \frac{\pi^2}{6}\left(k_\mathrm{B}T\right)^2 f'(\mu) + \mathcal{O}\left(\left(k_\mathrm{B}T\right)^4\right) \tag{8}$$

gilt[2].

b) Zeigen Sie zunächst mit Hilfe von (8), dass für niedrige Temperaturen näherungsweise

$$\mu - \varepsilon_F = -\frac{\pi^2}{6}\left(k_\mathrm{B}T\right)^2 \frac{\nu'(\varepsilon_F)}{\nu(\varepsilon_F)}\left(1 + \mathcal{O}\left(T^2\right)\right) \tag{9}$$

gilt. *(2 Punkte)*

c) Zeigen Sie (mit dem Ergebnis aus b)), dass für den Erwartungswert der Energie bei niedrigen Temperaturen näherungsweise

$$E = E_0 + \frac{\pi^2}{6}\left(k_\mathrm{B}T\right)^2 \nu(\varepsilon_F) + \mathcal{O}\left(T^4\right) \quad \text{mit} \quad E_0 = \int_0^{\varepsilon_F} \mathrm{d}\varepsilon\ \nu(\varepsilon)\varepsilon \tag{10}$$

gilt. *(2 Punkte)*

d) Zeigen Sie, dass hieraus

$$C_V = \frac{\pi^2}{3} k_\mathrm{B}^2 T\, \nu(\varepsilon_F) + \mathcal{O}\left(T^3\right) \tag{11}$$

folgt. *(1 Punkt)*

e) Für homogene Systeme gilt für die isotherme Kompressibilität

$$\kappa_T = \frac{V}{N^2}\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_{T,V}\ . \tag{12}$$

Verwenden Sie diese Relation, um zu zeigen, dass

$$\kappa_T = \frac{V}{N^2}\,\nu(\varepsilon_F) + \mathcal{O}\left(T^2\right) \tag{13}$$

gilt. *(1 Punkt)*

Diese Relationen zeigen, dass für das Tieftemperaturverhalten thermodynamischer Größen nur der Wert der Zustandsdichte bei der Fermi-Energie maßgeblich ist.

[2] Beachten Sie, dass es sich hierbei um eine asymptotische Reihe handelt.

H.12.2 Thermisches Photonengas (10 Punkte)

Wir betrachten ein thermisches Photonengas mit der Energie-Impuls-Beziehung $E = |p|c$. Die Zustandsdichte für ein solches Gas ist gegeben durch[3]

$$\rho(E) = \frac{VE^2}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \ . \tag{14}$$

a) Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme sowie das großkanonische Potential des Photonengases. Was gilt dabei für μ?
Sie sollten folgendes Ergebnis erhalten:

$$\Phi = -\frac{\pi^2 k_\mathrm{B}^4}{45\hbar^3 c^3} V T^4 \ . \tag{15}$$

<u>*Hinweis*</u>: $\int_0^\infty \mathrm{d}x \; x^2 \log\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right) = -\frac{\pi^4}{45}$ (*3 Punkte*)

b) Berechnen Sie nun die mittlere Photonenzahl N.
Sie sollten folgendes Ergebnis erhalten:

$$N = 0{,}244 \left(\frac{k_\mathrm{B}T}{\hbar c}\right)^3 V \ . \tag{16}$$

<u>*Hinweis*</u>: $\frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \mathrm{d}x \; \frac{x^2}{\mathrm{e}^x - 1} \approx 0{,}244$ (*3 Punkte*)

c) Berechnen Sie aus dem großkanonischen Potential die Entropie S sowie die innere Energie E. Die Temperaturabhängigkeit der inneren Energie des Photonengases heißt *Stefan-Boltzmann-Gesetz*.
<u>*Hinweis*</u>: Vergleichen Sie die freie Energie mit dem großkanonischen Potential. (*2 Punkte*)

d) Verwenden Sie geeignete thermodynamische Ableitungen, um die thermische Zustandsgleichung zu berechnen. Bestimmen Sie hierzu den Druck P, auch Strahlungsdruck genannt, bei der Temperatur T. Hängt der Druck vom Volumen V ab? Interpretieren Sie das Ergebnis physikalisch. (*1 Punkt*)

e) Betrachten Sie nun abschließend die Adiabatengleichung. Hierzu schauen wir uns Zustandsänderungen an, bei denen sich das Volumen ohne Wärmeaustausch (quasistatisch) ändert, d. h. $\mathrm{d}S = 0$. Was gilt hierbei für die Änderung der Photonenzahl N?
Stellen Sie hiermit die Zusammenhänge $T(V)$ sowie $P(V)$ für die adiabatische Zustandsänderung her. Eine adiabatische Ausdehnung erfolgte z.B. bei der Expansion des frühen Universums, seit das Photonengas von der Wechselwirkung mit Materie abgekoppelt war.
<u>*Hinweis*</u>: Vergleichen Sie (b) und (c). (*1 Punkt*)

[3] In der Zustandsdichte wurde bereits ein Faktor 2 für den Polarisationsfreiheitsgrad berücksichtigt.