Universität Bonn
Physikalisches Institut
Theoretische Physik

Übungsblatt 14
21.01.2020
WS 19/20

Theoretische Physik IV (Statistische Physik)

Vorlesung: Prof. Dr. Albrecht Klemm
Übungsleitung: M. Sc. Fabian Fischbach
http://www.th.physik.uni-bonn.de/people/fischbach/ws1920/tp4/index.php

–Hausaufgaben–

Besprechung der Hausaufgaben: Di. 28.01.2020 (in der Vorlesung)

H.14.1 Thermodynamische Relationen in magnetischen Systemen

Gegeben sei ein (homogenes) magnetisches System im thermodynamischen Gleichgewicht, das im Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T stehe. Paare konjugierter Zustandsvariablen sind hier (S,T) und (H,M), wobei M das magnetische Moment[1] des Systems bezeichnet und H ein von äußeren Quellen erzeugtes Magnetfeld darstellt.[2] Für die freie Energie $F = -k_\mathrm{B} T \log Z = E - TS$ lautet das Differential

$$\mathrm{d}F = -S\mathrm{d}T - M\mathrm{d}H \; . \tag{1}$$

a) Was sind hier die natürlichen Variablen von F? Welche (magnetische) Maxwell-Relation erhalten Sie zu F?

b) Führen Sie die Legendre-Transformation auf ein thermodynamisches Potential A durch, das von der Temperatur T und einer im Vergleich zu den natürlichen Variablen von F konjugierten Variablen abhängt.

c) Zeigen Sie die Identität

$$\left(\frac{\partial S}{\partial M}\right)_T = -\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_M . \tag{2}$$

In Analogie zu den spezifischen Wärmen z. B. eines Gases führt man die spezifischen Wärmen

$$C_M := T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_M \quad \text{und} \quad C_H := T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_H \tag{3}$$

ein und definiert die isotherme Suszeptibilität

$$\chi_T := \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T \quad \text{sowie} \quad \alpha_H := \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H . \tag{4}$$

[1] Beachten Sie, dass es sich bei der Größe mit Symbol M hier also *nicht* um die Magnetisierung handelt. Letztere gibt das magnetische Moment pro Volumen V an. Die Notation in dieser Aufgabe weicht damit von jener im Lehrbuch von F. Schwabl zur statistischen Mechanik, Kapitel 6, etwas ab, wo stattdessen das Symbol $\mathcal{M}$ für das magnetische Moment verwendet wird (und $M = \mathcal{M}/V$ die Magnetisierung bezeichnet). Die Größen α_H und χ_T in dieser Aufgabe unterscheiden sich deshalb ebenfalls um Volumenfaktoren von jener im genannten Lehrbuch.

[2] Wir beschränken uns auf eine eindimensionale Betrachtung, indem wir die Parallelität von magnetischem Moment und Magnetfeld annehmen. Des Weiteren werden die Teilchenzahl und das Volumen als fest betrachtet.

Diese Größen genügen der Beziehung

$$C_H - C_M = T\frac{\alpha_H^2}{\chi_T} \ . \tag{5}$$

d) Beweisen Sie Gleichung (5).

H.14.2 Pauli-Paramagnetismus

Wir betrachten ein freies, nicht-relativistisches, nicht wechselwirkendes Elektronengas in drei Raumdimensionen und wollen die Ankopplung des Elektronenspins ($s = \frac{1}{2}, g_e \approx 2$) an ein schwaches, äußeres Magnetfeld H diskutieren. Die Einteilchenenergien sind, ausgedrückt durch das Bohrsche Magneton μ_B,

$$\varepsilon_{\vec{p},\sigma} = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} + \sigma\,\frac{1}{2}g_e\mu_\mathrm{B}H \ , \tag{6}$$

wobei $\sigma = +1$ ($\sigma = -1$) zu Zuständen mit Spin parallel (entgegengesetzt) zum Magnetfeld gehört.

Zunächst betrachten wir den Fall $H = 0$, $T = 0$.[3]

a) Berechnen Sie die Fermi-Energie ε_F und drücken Sie diese durch die Teilchendichte $n = N/V$ aus.

b) Wir definieren die Zustandsdichte ν durch[4]

$$\nu(\varepsilon) := \frac{gV}{(2\pi\hbar^3)}\int \delta\left(\varepsilon - \frac{|\vec{p}|^2}{2m}\right)\,\mathrm{d}^3p \ . \tag{7}$$

Zeigen Sie die Identität

$$\nu(\varepsilon) = \frac{3}{2}N\varepsilon_F^{-3/2}\sqrt{\varepsilon} \ . \tag{8}$$

Hinweis: Verwenden Sie dabei

$$\delta(f(x)) = \sum_{\{x_i|f(x_i)=0,f'(x_i)\neq 0\}} \frac{1}{|f'(x_i)|}\delta(x - x_i) \ . \tag{9}$$

Jetzt betrachten wir $H \gtrsim 0$ und $T \gtrsim 0$.

c) Berechnen Sie die Anzahl der Elektronen N_σ zu gegebenem $\sigma = \pm 1$. Zeigen Sie, dass für schwache Magnetfelder $g_e\mu_\mathrm{B}H \ll \mu \approx \varepsilon_F$ näherungsweise gilt:

$$N_\sigma = \int_0^\infty \frac{1}{2}\nu(\varepsilon)\left[n(\varepsilon) + \sigma\, n'(\varepsilon)\frac{1}{2}g_e\mu_\mathrm{B}H + \mathcal{O}\left(H^2\right)\right]\mathrm{d}\varepsilon \ . \tag{10}$$

Hierin ist $n(\varepsilon) = (1 + \exp[\beta(\varepsilon - \mu)])^{-1}$ die Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion.

[3] Die Aufgabenteile a) und b) dienen Ihnen zur Wiederholung.

[4] Hierbei ist $g = 2$ der Spin-Entartungsfaktor, während $g_e \approx 2$ der Landé-g-Faktor ist.

d) Berechnen Sie durch eine geeignete thermodynamische Ableitung des großkanonischen Potentials

$$\Phi = -\beta^{-1} \sum_{\vec{p},\sigma} \log\left(1 + \mathrm{e}^{-\beta(\varepsilon_{\vec{p},\sigma} - \mu)}\right) \tag{11}$$

die Magnetisierung M und zeigen Sie somit

$$M = -\frac{g_e}{2} \mu_\mathrm{B} \frac{(N_+ - N_-)}{V} \ . \tag{12}$$

e) Bestimmen Sie für den Tieftemperaturlimes $T = 0$ die Magnetisierung sowie die magnetische, isotherme Suszeptibilität $\chi := \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_{T,V,N}$ des Elektronengases näherungsweise. Sie sollten dabei folgendes Ergebnis erhalten:

$$\chi = \mu_\mathrm{B}^2 \frac{3}{2} \frac{g_e}{2} \frac{N}{V} \varepsilon_F^{-1} + \mathcal{O}\left(H^2\right) \ . \tag{13}$$

Die hier gefundene magnetische Suszeptibilität beschreibt also die magnetische Antwort eines freien Elektronengases auf das äußere Magnetfeld, welche auch als Pauli-Paramagnetismus bezeichnet wird.