Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Blatt 1
11 April 2014
SS 2014

Übungen zur Quantenmechanik und statistischen Physik

Priv.-Doz. Dr. Stefan Förste

http://www.th.physik.uni-bonn.de/people/forste/exercises/la_tp2

–Anwesenheitsaufgaben–

A 0.1 Hohlraumstrahlung (klassisch)

Ein Hinweis für den Zusammenbruch der klassischen Physik auf kleinen Skalen liefert die klassischen Berechnung der Hohlraumstrahlung, in der Licht als eine klassische Welle betrachtet wird. Wir werden sehen, dass diese Annahme zu Problemen führen wird.

(a) Wie hängt die Intensität I_0 einer ebenen Welle von ihrer Energiedichte ρ ab?

Die Hohlraumstrahlung setzt sich aus N ebenen Wellen zu einer isotropen Strahlung zusammen.

(b) Berechne die Intensität I der isotropen Stahlung.

(c) Gib das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r},t)$ einer elektromagnetischen Welle, für den Fall, dass keine Ladungsquellen vorhanden sind, an. Benutze den Ansatz $\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r})\mathrm{e}^{i\omega t}$ und bestimme $\vec{A}(\vec{r},t)$.

(d) Zeige, dass es zu jedem Wellenvektor $\vec{k}$ zwei Polarisationen gibt.

Betrachten wir den Hohlraum als verspiegelten würfelförmigen Kasten mit den Kantenlängen a.

(e) Bestimme die Wellenzahlen k_x, k_y und k_z. Wie viele linear unabhängige Funktionen $\vec{A}(\vec{r},t)$ gibt es? Gib die Anzahl $\mathrm{d}N(\nu)$ der im Frequenzintervall zwischen ν und $\nu + \mathrm{d}\nu$ gelegenen unabhängigen Lösungen für $\vec{A}(\vec{r},t)$ an.

Nutze, dass die mittlere Energie pro Frequenz durch $k_B T$ berechnet werden kann, wobei T die Temperatur und k_B die Boltzmann-Konstante sei.

(f) Bestimme die spektrale Energiedichte $\rho(\nu,T)$. Integriere $\rho(\nu,T)$ über das gesamte Spektrum und interpretiere das Ergebnis?

Der Ansatz, dass Licht eine klassische Welle ist, führt zu einer Divergenz, welches in der Natur nicht beobachtet wird. D.h. die klassische Betrachtungsweise verliert bei kleinen Abständen ihre Gültigkeit, da Quanteneffekte eine nicht-vernachlässigbare Rolle spielen. Die emittierte Strahlung hängt in diesem Fall von der mikroskopischen Beschaffenheit der Wände des Hohlraums ab und um diese zu verstehen benötigt man Quantenmechanik.

A 0.2 Plancksches Strahlungsgesetz

Jetzt werden wir Licht auch Teilcheneigenschaften zuordnen und bezeichnen ein "Lichtteilchen" oder "Lichtpaket" als *Photon*. Photonen haben eine bestimmte Energie E, die von ihrer Frequenz ν abhängt[1]

$$E = h\nu. \tag{1}$$

Der Zustand eines Atoms (aus denen die Wände des Hohlraums bestehen) kann durch ein Energieniveau E_n, in dem es sich befindet, bestimmt werden. Es kann in einen energieärmeren Zustand $E_m < E_n$ fallen, indem es ein Photon mit der Energie $E_n - E_m$ emittiert, oder in einen energiereicheren Zustand $E_m > E_n$ springen, indem es ein Photon der Energie $E_n - E_m$ absorbiert. Die Emission eines Photons kann spontan mit der Wahrscheinlichkeit $a^n_{m\alpha}$ erfolgen. Diesen Vorgang bezeichnet man als *spontane Emission*. Durch die Anwesenheit eines Photons kann aber ein Atom mit einer Wahrscheinlichkeit $b^n_{m\alpha}$ dazu verleitet werden, ein Photon, mit den gleichen Eigenschaften wie das anwesende Photon, zu emittieren. Dieser Vorgang heißt *induzierte Emission*. Die Absorbtion eines Photons erfolgt mit einer Wahrscheinlichkeit $b^m_{n\alpha}$. α bezeichnet die Polarisation des Photons. Die Atome können sich allerdings nicht in beliebigen sondern nur in bestimmten diskerten Energieniveaus befinden.

(a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit $\mathrm{d}W_e$, mit der Photonen der Energie $E_n - E_m$ in den Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega$ emittiert werden und die Wahrscheinlichkeit $\mathrm{d}W_a$, dass Photonen aus dem Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega$ absorbiert werden? Benutze dazu, dass die Anzahl der Photonen im Frequenzbereich ν bis $\nu + \mathrm{d}\nu$ und im Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega$ durch

$$\frac{\rho(\nu, T)\mathrm{d}\nu\mathrm{d}\Omega}{h\nu}, \tag{2}$$

gegeben sei.

Die Anzahl N_n der Atome im Zustand mit der Energie E_n kann durch die Boltzmann-Verteilung

$$N_n \sim \exp\left(-\frac{E_n}{k_B T}\right) \tag{3}$$

berechnet werden.

(b) Berechne $\rho(\nu, T)$.

(c) Entwickle $\rho(\nu, T)$ für $h\nu/k_B T \ll 1$. Vergleiche das Ergebnis mit dem Ergebnis aus A 0.1 und bestimme das Verhältnis $\frac{a^n_{m\alpha}}{b^n_{m\alpha}}$.

Die Planckkurve $\rho(\nu, T)$ ist im Einklang mit Messergebnissen, was bedeutet, dass die in dieser Aufgabe verwendeten Annahmen eine bessere Beschreibung für die mikroskopischen Vorgänge im Hohlraum sind. Die verwendeten Annahmen sind Ergebnisse der Quantenmechanik und wir werden im Laufe der Vorlesung lernen wie man quantitative Vorhersagen für den Mikrokosmos treffen kann.

[1] Siehe photoelektrischer Effekt.

H 1.1 Koordinatentransformationen *(13 points)*

Nehmen wir einen Punkt $\mathcal{P}$, welcher in einem kartesischen Koordinatensystem durch die Koordinaten $\mathbf{p} = (1, 0, 0)$ dargestellt wird. Wir werden zwei Koordinatentransformationen machen. Zuerst drehen wir das Koordinatensystem um $\pi/4$ um die zweite Achse und dann um $\pi/2$ um die dritte Achse.

(a) Bestimme die Darstellungen $\mathbf{p}'$ und $\mathbf{p}''$ nach der ersten und der zweiten Koordinatentransformation des Punktes $\mathcal{P}$. (*3 points*)

(b) Bestimme die Transformationsmatrix für die gesamte Koordinatentransformation (d.h. die Transformationsmatrix die beide Drehungen enthält). (*3 points*)

(c) Macht es für das obige Ergebnis einen Unterschied, wenn wir die Reihenfolge der zwei Drehungen vertauschen? (*3 points*)

Das kartesische Koordinatensystem ist nicht die einzige Wahl für ein Koordinatensystem. Ein anderes Beispiel wäre das Kugelkoordinatensystem. Dabei werden die kartesischen Koordinaten x, y und z durch Kugelkoordinaten r, ϕ und θ wie folgt ausgedrückt

$$\begin{aligned} x =& r\mathrm{sin}\theta\mathrm{cos}\phi, \\ y =& r\mathrm{sin}\theta\mathrm{sin}\phi, \\ z =& r\mathrm{cos}\theta. \end{aligned}$$

(d) Transformiere das Volumenelement $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ in Kugelkoordinaten. (*4 points*)
Tipp: Benutze die Funktionaldeterminante!

H 1.2 Planck-Konstante *(2 points)*

Wenn ultravioletes Licht der Wellenlängen $\lambda_1 = 280\mathrm{nm}$ und $\lambda_2 = 490\mathrm{nm}$ auf eine Bleiplatte fällt, lösen die Photonen Elektronen heraus, welche die Energie $8,57\mathrm{eV}$ und $6,67\mathrm{eV}$ besitzen. Bestimme die Planck-Konstante h und die Bindungsenergie E_{bind} von Blei.

H 1.3 Materiewelle *(5 points)*

Ein typisches Experiment, welches die Welleneigenschaften von Licht enthüllt, ist das Doppelspalt-Experiment. Das dabei beobachtete Interferenzmuster ist ein deutliches Indiez für eine Welle. Man kann statt Licht nun einen Elektronstrahl auf einen Doppelspalt schießen und würde naiv erwarten, dass keine Interferenzen auftreten. Benutzt man hierfür dan selben Doppelspalt wie für das Doppelspalt-Experiment mit Licht, ist dies auch der Fall. Nimmt man aber stattdessen ein Doppelspalt mit einem Spaltabstand in der Größenordnung von Nanometern, sieht man ein Interferenzmuster ähnlich wie beim Licht. Nehmen wir an, der Spaltabstand wäre $a = 10\mathrm{nm}$ und dass die Elektronen im Elektronstrahl eine Energie von 4eV besitzen. Stellt man nun ein Schirm 1m entfernt von dem Doppelspalt auf, so beobachtet man das erste Hauptmaximum des Interferenzmusters ungefähr 6,2cm von dem Strahlmittelpunkt entfernt (siehe Bild 1).

(a) Berechne den Impuls der Elektronen. (*2 points*)

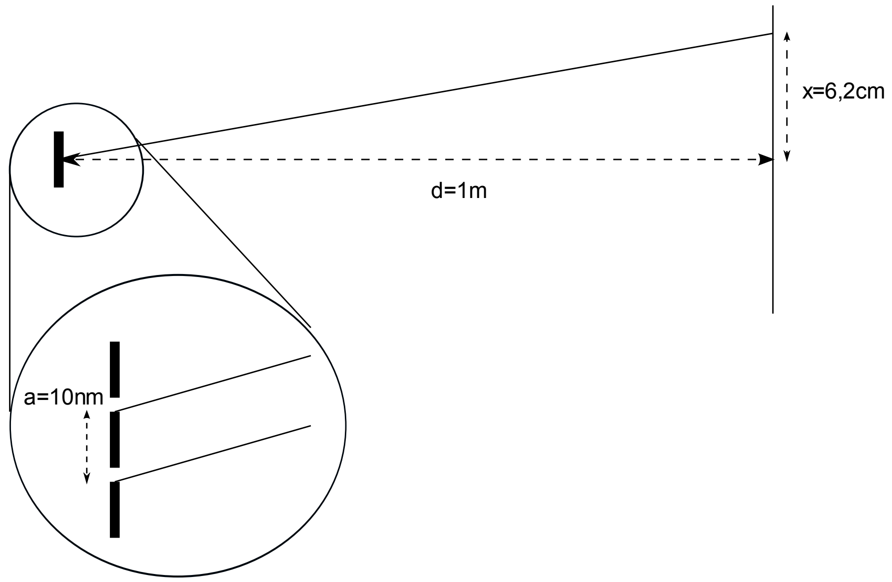

Figure 1:

(b) Berechne die Wellenlänge des Elektronstrahls. (*2 points*)

(c) Berechne das Verhältnis von Wellenlänge und Impuls des Elektrons. (*1 point*)