Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Blatt 10
20 Juni 2014
SS 2014

Übungen zur Quantenmechanik und statistischen Physik

Priv.-Doz. Dr. Stefan Förste

http://www.th.physik.uni-bonn.de/people/forste/exercises/la_tp2/

–HAUSAUFGABEN–Abgabe: 27.06.2014

H 10.1 Wassersstoffatom im homogenen Magnetfeld *(15 points)*

Betrachten wir zunächst ein Teilchen der Masse μ und der elektrischen Ladung q, welches sich in einem radialsymmetrischen Potential $\hat{V}(r)$ befindet und zusätzlich einem homogenen Magnetfeld $\vec{B}$ ausgesetzt ist. Zu einem B-Feld können wir ein Vektorpotential $\vec{A} = \frac{1}{2}\left(\vec{B} \times \vec{x}\right)$ assoziieren.

(a) Zeige zunächst, dass für allgemeine Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$

$$\vec{\bigtriangledown} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u}(\vec{\bigtriangledown} \cdot \vec{v}) - \vec{v}(\vec{\bigtriangledown} \cdot \vec{u}) + (\vec{v} \cdot \vec{\bigtriangledown})\vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\bigtriangledown})\vec{v} \tag{1}$$

gilt, wobei $\vec{\bigtriangledown}$ der Nabla-Operator ist. Nutze das Ergebnis um zu zeigen, dass $\vec{\bigtriangledown} \times \vec{A} = \vec{B}$. *(3 points)*

Bei eingeschaltetem Magnetfeld verschiebt sich der Impuls $\vec{p}$ des Teilchens um $\vec{p} \to \vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}$, wobei c die Lichtgeschwindigkeit sei.

(b) Zeige, dass der Hamiltonoperator ohne Magnetfeld $\hat{H}_0$ durch einschalten des Magnetfeldes sich zu

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \frac{q}{1\mu c}\left(\hat{\vec{P}} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \hat{\vec{P}}\right) + \frac{q^2}{2\mu c^2}\vec{A}^2 \tag{2}$$

transformiert. *(2 points)*

(c) Benutze die Coulomb-Eichung $\vec{\bigtriangledown} \cdot \vec{A} = 0$ um zu zeigen, dass der Hamiltonoperator durch

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \frac{\mu_B}{\hbar}\hat{\vec{L}} \cdot \vec{B} + \frac{q^2}{2\mu c^2}\vec{A}^2, \tag{3}$$

mit dem bohrschen Magneton $\mu_B = \frac{q\hbar}{2\mu c}$, gegeben ist. *(2 points)*

(d) Drücke nun $\vec{A}^2$ durch $\vec{x}$ und $\vec{B}$ aus. Der Hamiltonoperator kann geschrieben werden als

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mu}\hat{\vec{P}}^2 + \hat{V}(r) - \frac{q}{2\mu c}\vec{B} \cdot \hat{\vec{L}} + \frac{q^2}{8\mu c^2}\left[B^2x^2 - \left(\vec{B} \cdot \vec{x}\right)^2\right]. \tag{4}$$

(1 point)

Hinweis: $(\vec{C} \times \vec{D}) \cdot (\vec{E} \times \vec{F}) = (\vec{C} \cdot \vec{E})(\vec{D} \cdot \vec{F}) - (\vec{C} \cdot \vec{F})(\vec{D} \cdot \vec{E})$

Nun betrachten wir ein Elektron (ohne Spin) im Wasserstoffatom, welches einem homogenen Magnetfeld ausgesetzt ist. Sei das Magnetfeld gegeben durch

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} . \tag{5}$$

(e) Berechne den zugehörigen Hamiltonoperator und vernachlässige den B^2-Term. Sind dessen Eigenfunktionen immernoch die Eigenfunktionen $\psi(r,\theta,\phi) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\phi) =: |nlm\rangle$ des ungestörten Wasserstoffatoms? (*2 points*)

(f) Berechne die Energieeigenwerte des Zustandes $|nlm\rangle$. (*2 points*)

(g) Beschreibe (graphisch) den Unterschied der zwischen den Zuständen $n = 1, 2, 3$ mit eingeschaltetem B-Feld und ausgeschaltetem B-Feld. Du solltest sehen, dass die Entartung der m-Quantenzahlen aufgehoben ist. (*2 points*)

(h) Eine Entartung ist meistens eine Folge einer vorhanden Symmetrie der Theorie. Warum hebt sich die Entartung demzufolge auf , wenn wir das Magnetfeld einschalten? (*1 point*)

H 10.2 Messungen von wasserstoffähnlichen Zuständen *(5 points)*

Sei die Wellenfunktion für ein wasserstoffähnliches Atom zum Zeitpunkt $t = 0$ durch

$$\phi(\vec{r}, 0) = \frac{1}{\sqrt{11}} \left[\sqrt{3}\psi_{21-1}(\vec{r}) - \psi_{210}(\vec{r}) + \sqrt{5}\psi_{211}(\vec{r}) + \sqrt{2}\psi_{311}(\vec{r}) \right], \tag{6}$$

wobei $\psi_{nlm}(\vec{r})$ die normierten Eigenfunktionen des Wasserstoffatoms sind.

(a) Gib die zeitabhängige Wellenfunktion an. (*2 points*)

(b) Welche Energiewerte würde man durch Messungen bestimmen können und welche Wahrscheinlichkeit hätten diese? (*2 points*)

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit würde ein Messung von $\hat{L}_z$ einen Wert von $1\hbar$ ergeben? (*1 point*)