Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Blatt 11
27 Juni 2014
SS 2014

Übungen zur Quantenmechanik und statistischen Physik

Priv.-Doz. Dr. Stefan Förste

http://www.th.physik.uni-bonn.de/people/forste/exercises/la_tp2/

–Hausaufgaben–Abgabe: 04.07.2014

H 11.1 Ensemble quantenmechanischer harmonischer Ozsillatoren *(15 points)*

Wir betrachten ein System von N unterscheidbaren, wechselwirkungsfreien, quantenmechanischen, harmonischen Oszillatoren mit gleicher Winkelfrequenz ω. Die Zustände des Gesamtsystems sind dann gegeben durch Tensorprodukte der Einzelzustände.

$$|n_1, n_2, ..., n_N\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes \cdots \otimes |n_N\rangle. \tag{1}$$

Wir schreiben abkürzend

$$a_i \equiv \mathbb{1}^{\otimes(i-1)} \otimes a \otimes \mathbb{1}^{\otimes(N-i)} = \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1} \otimes \underbrace{a}_{iteStelle} \otimes \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1} \tag{2}$$

für den Absteigeoperator des $i$ten Teilchens . Für $a_j^\dagger$, N_j, H_j gelten analoge Definitionen. Der Hamiltonoperator des Gesamtsystems sei gegeben durch

$$H = \sum_{j=1}^{N} \hbar\omega \left(a_j^\dagger a_j + \frac{1}{2} \right). \tag{3}$$

Betrachte zuerst den Fall $N = 3$. Das Ensemble soll aus allen Zuständen der Gesamtenergie $E = \frac{9}{2}\hbar\omega$ bestehen.

(a) Durch wieviele Zustände lässt sich dieser Wert der Energie realisieren? (*1 point*)

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit $p(\epsilon)$ findet man einen ausgewählten Oszillator mit der Energie ϵ? (*2 points*)

Wir wollen nun die Anzahl der Zustände bei einem festen Wert der Energie E bei einer großen Anzahl von Oszillatoren $N \gg 1$ bestimmen. Sie sei gegeben durch

$$\Omega(E) = \int \mathrm{d}\tilde{E} \delta \left(E - \tilde{E} \right). \tag{4}$$

(c) Gib $\Omega(E)$ für das betrachtete System an. (*3 points*)

(d) Zeige, dass

$$\Omega(E) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \mathrm{e}^{ikE} \left(\frac{-ik\hbar\omega/2}{1 - {}^{-ik\hbar\omega}} \right)^N \tag{5}$$

und weiter, dass

$$\Omega(E) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \mathrm{e}^{N(ik(E/N) - \log(2i\sin(k\hbar\omega/2)))}. \tag{6}$$

Hinweis: Nutze die Integraldarstellung der δ Distribution. *(4 points)*

(e) Dieses Integral kann mit der Sattelpunktmethode berechnet werden. Zeige, dass $\Omega(E)$ durch

$$\Omega(E) = \exp\left\{ N \left[\frac{\frac{E}{N} + \frac{1}{2}\hbar\omega}{\hbar\omega} \log \frac{\frac{E}{N} + \frac{1}{2}\hbar\omega}{\hbar\omega} - \frac{\frac{E}{N} - \frac{1}{2}\hbar\omega}{\hbar\omega} \log \frac{\frac{E}{N} - \frac{1}{2}\hbar\omega}{\hbar\omega} \right] \right\} \tag{7}$$

gegeben ist. *(5 points)*

H 11.2 Permutationsoperator *(5 points)*

Sei der Zustand eines N-Teilchen Systems gegeben durch

$$|\psi_1, \psi_2, ..., \psi_N\rangle =: |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\psi_N\rangle. \tag{8}$$

Dann definieren wir den Permutationsoperator $\hat{P}_\pi$ durch

$$\hat{P}_\pi |\psi_1, \psi_2, ..., \psi_N\rangle = |\psi_{\pi(1)}, \psi_{\pi(2)}, ..., \psi_{\pi(N)}\rangle, \tag{9}$$

wobei π die Reihenfolge der Zahlen (1,2,...,N) verändert. Jede Permutation π kann durch eine Verkettung von Transpositionen $\hat{P}_{ij}$ dargestellt werden, wobei eine Transposition durch

$$\hat{P}_{ij} |\psi_1, ..., \psi_i, ...\psi_j, ..., \psi_N\rangle = |\psi_1, ..., \psi_j, ...\psi_i, ..., \psi_N\rangle, \tag{10}$$

beschrieben werden kann. Die Eigenwertgleichung

$$\hat{P}_{12}|\Psi\rangle = \alpha_{12}|\Psi\rangle \tag{11}$$

besitzt die Lösungen $\alpha_{12} = \pm 1$, wie man leicht an dem 2-Teilchen System überprüfen kann.

(a) Zeige, dass $\hat{P}_{ij}$ durch $\hat{P}_{1i}\hat{P}_{2j}\hat{P}_{12}\hat{P}_{2j}\hat{P}_{1i}$ beschrieben werden kann und schließe daraus, dass für alle α_{ij} entweder $\alpha_{ij} = +1$ oder $\alpha_{ij} = -1$ gilt. D.h. es gilt für Eigenzustände $|\Psi\rangle$ des Permutationsoperators entweder

$$\hat{P}_\pi|\Psi\rangle = |\Psi\rangle \qquad \text{oder} \qquad \hat{P}_\pi|\Psi\rangle = (-1)^{|\pi|}|\Psi\rangle, \tag{12}$$

wobei $|\pi|$ die Anzahl an Vertauschungen ist. *(2,5 points)*

(b) Bilde den total symmetrischen und total antisymmetrischen Zustand für ein 3-Teilchen System. *(2,5 points)*