Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Blatt 2
18 April 2014
SS 2014

Übungen zur Quantenmechanik und statistischen Physik

Priv.-Doz. Dr. Stefan Förste

http://www.th.physik.uni-bonn.de/people/forste/exercises/la_tp2/

–Anwesenheitsaufgaben–

A 1.1 Eindimensionale Wellen I

Wir wollen in dieser Aufgabe Lösungen für die Wellengleichung

$$\triangle f(t,\vec{x}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial f(t,\vec{x})}{\partial t^2} \tag{1}$$

konstruieren. Beschränken wir uns zunächst auf den eindimensionalen Fall $\vec{x} = x$. Wir wollen $f(t,x)$ finden, welches

$$\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial t^2} = 0 \tag{2}$$

erfüllt.

(a) Zunächst wollen wir (2) in einer neuen Basis, den Lichtkegel-Koordinaten, angeben. Lichtkegel-Koordinaten sind gegeben durch

$$x^+ = x + ct, \quad x^- = x - ct. \tag{3}$$

Wie hängen die Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial t}$ von $\frac{\partial}{\partial x^+}$ und $\frac{\partial}{\partial x^-}$ ab?

(b) Schreibe die Wellengleichung (2) in den neuen Koordinaten hin.

(c) Zeige, dass $f(t,x) = f_+(x^+) + f_-(x^-)$ eine Lösung der Gleichung ist. Warum kann man sagen, dass $f_+(x^+)$ ($f_-(x^-)$) linkslaufend (rechtslaufend) ist?

(d) Nun seien folgende Randbedingungen für $f(t,x)$ gegeben

$$f(t=0,x) = f_0(x), \quad \frac{\partial f(t,x)}{\partial t}|_{t=0} = v_0(x). \tag{4}$$

Zeige, dass

$$f(t,x) = \frac{1}{2}\left(f_0(x^+) + f_0(x^-) + \frac{1}{c}\int_{x-t}^{x+t} v_0(y)\mathrm{d}y\right) \tag{5}$$

die Wellengleichung mit den angegeben Randbedingungen löst.

Eine weitere Methode, die Wellengleichung (2) zu lösen ist zunächst die *Frequenz-Eigenmoden* $f_\omega(t,x)$ zu untersuchen und dann $f(t,x)$ als eine Reihe von den Eigenmoden anzugeben.

(e) Sei

$$f_\omega(t,x) = \mathrm{e}^{-i\omega t}u(x). \tag{6}$$

Zeige, dass

$$f(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} s_+(\omega)\mathrm{e}^{-ik(x+ct)}\mathrm{d}\omega + \int_{-\infty}^{\infty} s_-(\omega)\mathrm{e}^{-ik(x-ct)}\mathrm{d}\omega, \tag{7}$$

wobei $s_+(\omega), s_-(\omega) \in \mathrm{Abb}(\omega, \mathbb{C})$ und $k = \frac{\omega}{c}$ die Wellenzahl ist.

Die Gleichung (7) beschreibt ein linkslaufendes und rechtslaufendes Wellenpaket, welches aus einer Überlagerung von ebenen Wellen besteht.

–Hausaufgaben–Abgabe: 25.04.2014

H 2.1 Comptonstreuung *(5 points)*

Ein Photon mit der Energie $100keV$ wird an einem ruhenden Elektron um $\frac{\pi}{2}$ gestreut. Wie verteilen sich die Energien nach dem Stoß? In welche Richtung bewegt sich das Elektron? Rechen mit Vierervektoren[1].

Hinweis:Die Ruhemasse eines Elektrons sei $511keV$.

H 2.2 Vektorräume *(5 points)*

Sei $\mathcal{P}^n$ die Menge aller (komplexen) Polynome vom Grad $\leqslant n$.

(a) Definiere die Rechenoperationen '+' und '·', sodass $\mathcal{P}^n$ ein Vektorraum wird. (*2 points*)

(b) Welche Dimension hat $\mathcal{P}^n$. (*1 point*)

(c) Finde eine Basis für diesen Vektorraum. (*1 point*)

(d) Gib ein Beispiel für einen Isomorphismus zwischen $\mathcal{P}^n$ und $\mathbb{C}^m$, wobei m die Dimension von $\mathcal{P}^n$ ist. (*1 point*)

[1]Ein Vierervektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{1,3}$ besteht aus vier Komponenten $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Das Skalarprodukt zweier Vierervektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ ist gegeben durch $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = -v_0 w_0 + v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$. Energie und Impuls bilden in der relativistischen Physik einen Vierervektor $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}$.

H 2.3 Halbklassisches Atommodel *(10 points)*

Im klassischen Atommodel betrachtet man das Atom als ein Objekt, dass aus einem positiv geladenen Atomkern und negativ geladenen Elektronen zusammengesetzt ist, wobei der Atomkern und die Elektronen als klassische Teilchen behandelt werden.. In einem Atom mit Z Protonen sorgt die Coulombkraft $\vec{F}_C = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$ dafür, dass die Elektronen sich auf einer Kreisbahnen mit dem Abstand $|\vec{r}|$ zum Kern bewegen. Experimente (z.B. Spektroskopie) haben allerdings gezeigt, dass die Energie der Elektronen quantisiert sein muss.

(a) Sei λ de *de Broglie* Wellenlänge eines Teilchens. Wie hängt λ von der kinetischen Energie für den klasssischen ($v \ll c$) und relativistischen ($v \gg c$) Grenzfall ab? (*1 point*)

(b) Wie hängt die Geschwindigkeit v eines Elektrons von dem Abstand r zum Atomkern ab, damit das Elektron mit einem konstanten Radius den Kern umkreist? Ist eine relativistische Rechnung notwendig? (*2 points*)

(c) Wir versuchen nun die Welleneigenschaft des Elektrons zu berücksichtigen. Fordere dazu, dass die Elektronen sich nur auf Bahnen befinden, welche zu konstruktiver Interferenz der Materiewelle führt und bestimme den Abstand dieser Bahnen zum Kern. Wie ist die Geschwindigkeit der Elektronen auf diesen Bahnen? (*2 points*)

(d) Welche Energie besitzen die Elektronen jeweils? (*2 points*)

(e) Wenn ein Elektron auf einen energieärmere Bahn fällt, emittiert es ein Photon, welches die überschüssige Energie trägt. Wie hängt die Wellenlänge der emittierten Photonen von den Bahnen der Elektronen ab? (*1 point*)

(f) Bewegte Ladungen Strahlen Energie ab, wobei der Energieverlust ΔE für Ladungen auf Kreisbahnen durch

$$\Delta E = \frac{(Ze)^2\beta^3}{(1-\beta^2)^2\epsilon_0}\frac{1}{3r}, \tag{8}$$

mit r des Radius der Keisbahn Ze der Ladung des Teilchens und $\beta = v/c$ das Verhältnis der Geschwindigkeit der Teilchens zur Lichtgeschwindigkeit. Berechne die Auswirkung auf die Umlaufbahn des Elektrons. Was passiert mit den Elektronen eines Atoms nach hinreichend langer Zeit? (*2 points*)