Physikalisches Institut | Blatt 3
Universität Bonn | 25 April 2014
Theoretische Physik | SS 2014

Übungen zur Quantenmechanik und statistischen Physik

Priv.-Doz. Dr. Stefan Förste

http://www.th.physik.uni-bonn.de/people/forste/exercises/la_tp2/

–Hausaufgaben–Abgabe: 02.05.2014

H 3.1 Eindimensionale Wellen II *(9,5 points)*

Wir ordnen einem Teilchen mit Impuls $\vec{p}$ eine Wellenlänge λ und Wellenvektor $\vec{k}$ über

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}, \quad \text{und} \quad |\vec{p}| = \frac{h}{\lambda} \tag{1}$$

zu. Diese Beziehung können wir benutzen um die allgemeine Lösung aus **A1.1** für die Wellengleichung durch den Impuls und die Energie des Teilchens auszudrücken.

(a) Drücke die Funktion $f(x,t)$ in (7) aus **A1.1** durch die Parameter $\vec{p}$ und E aus

$$f(x,t) = \int \frac{1}{\hbar} s_+(p) \mathrm{e}^{-i(p\cdot x+Et)/\hbar} \mathrm{d}p + \int \frac{1}{\hbar} s_-(p) \mathrm{e}^{-i(p\cdot x-Et)/\hbar} \mathrm{d}p \tag{2}$$

Entwickle dazu die Wellenfunktion in *Impuls-Eigenmoden.* *(0,5 points)*

Wir wollen in den folgender Aufgabe nur noch die linkslaufende Welle betrachten. Setze für $s_-(p)$ eine *Gaußsche Funktion*

$$s_-(p) = \frac{A}{2\pi} \exp\left[-(p-p_0)^2 d^2/\hbar^2\right] \tag{3}$$

ein.

(b) Vereinfache den Exponenten in $f(x,t)$ mit Hilfe von quadratischer Ergänzung und führe die Integration aus. Was für eine Funktion ist $f(x,t)$? *(2 points)*
Hinweis: $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$.

$|f(x,t)|^2$ wird als die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x,t)$ interpretiert. Die Wahrscheinlichkeit $P(t)$ ein Teilchen in einem Raumvolumen V vorzufinden sei durch

$$P(t) = \int_V |f(x,t)|^2 \mathrm{d}x \tag{4}$$

gegeben.

(c) Wie ist die Wahrscheinlichkeit $\tilde{P}(t)$ ein Teilchen irgendwo auf $\mathbb{R}$ vorzufinden? Bestimme den Faktor A, sodass $\int_{\mathbb{R}} |f(x,t)|^2 \mathrm{d}x = \tilde{P}(t)$ ergibt und zeige dadurch, dass

$$|f(x,t)^2| = \frac{1}{d\sqrt{2\pi(1+\frac{t^2\hbar^2}{4m^2d^4})}} \exp\left(-\frac{(x-\frac{p_0}{m}t)^2}{2d^2(1+\frac{t^2\hbar^2}{4m^2d^4})}\right). \tag{5}$$

(2,5 points)

(d) Der Mittelwert $\langle A(x)\rangle$ einer Observablen $A(x)$, deren Definitionsmenge $\mathbb{D}$ kontinuierlich ist, sei gegeben durch das Integral

$$\langle A(x,t)\rangle = \int_{\mathbb{D}} \rho(x,t) A(x) \mathrm{d}x \tag{6}$$

gegeben. Berechne den Mittelwert $\langle x\rangle$ und das Schwankungsquadrat $\langle(\Delta x)^2\rangle = \langle(x - \langle x\rangle)^2\rangle$ des Ortes x für die Gaußsche Funktion $f(x,t)$. Wie verhält sich die Funktion mit zunehmender Zeit? *(2 points)*

(e) Die Wahrscheinlichkeit $P_p(t)$ ein Teilchen mit Impuls $p \in [\tilde{p}, \tilde{p} + \delta p]$ zu finden, lässt sich durch

$$P_p(t) = \frac{2\pi}{\hbar} \int_{\tilde{p}}^{\tilde{p}+\delta p} |s_-(p)|^2 \mathrm{d}p \tag{7}$$

bestimmen. Berechne den Mittelwert und das Schwankungsquadrat des Impulses und berechne die Unschärfe $\Delta x \Delta p$ für $f(x,t)$. Kann man Impuls und Ort gleichzeitig beliebig genau bestimmen? *(2,5 points)*

H 3.2 Operatoren in Vektorräumen *(10 points)*

(a) Wir haben bereits gesehen, dass Teilchen in einer Dimension durch eine Superposition von eindimensionalen ebenen Wellen, dargestellt werden können. Zeige, dass eine ebene Welle

$$\psi(x,t) = C \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(px - \frac{p^2}{2m}t\right)\right] \tag{8}$$

ein Vektor $\vec{v}$ aus dem Vektorraum $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ [1] ist. Finde dazu eine Basis $\{e_i\}$ für $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ und zeige, dass $\psi(x,t)$ eine Linearkombination von $\{e_i\}$ ist. Welche Dimension hat $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$? *(1 point)*

Die ebene Welle ist nur ein Beispiel dafür, dass in der Quantenmechanik die Information eines Zustandes in einer Wellenfunktion $\psi(x,t)$ enthalten ist. Diese Wellenfunktionen sind Elemente aus einem Vektorraum. Klassische Observablen wie Impuls $\vec{p}$ und Energie E sind *Eigenwerte* von *Operatoren* $\hat{A}$, welche auf den Vektorraum der Wellenfunktionen wirken.

[1] $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ ist der Raum der stetien komplexwertigen Funktionen mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$.

(b) Zeige, dass die eindimensionalen Operatorn

$$\hat{P} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, \tag{9}$$

$$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \tag{10}$$

auf $\psi(x,t)$ aus (8) angewandt, tatsächlich die Energie E und den Impuls p aus der Wellenfunktion extrahieren, d.h. $\hat{E}\psi = E\psi$ und $\hat{P}\psi = p\psi$. Die Eigenwerte eines Operators sind die Diagonalelemente des Operators in einer bestimmten Basis, welche man die *Eigenbasis* nennt. Drücke die Gleichung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial}{\partial x^2}\psi(x,t) \tag{11}$$

durch die Eigenwerte aus. Ist das Ergebnis konsistent mit der klassischen Mechanik? (*1 point*)

Die ebene Welle beschreibt ein freies Teilchen. Kompliziertere Probleme involvieren kompliziertere Operatorgleichungen. Wir wollen im Folgenden eine Methode studieren Eigenwerte zu bestimmen.

(c) Die Determinante einer $n \times n$ Matrix $\hat{A}$ sei definiert durch

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{i_1,i_2,\dots i_n=1}^{n} \varepsilon_{i_1,i_2,\dots,i_n} \prod_{j=1}^{n} a_{i_j j}, \tag{12}$$

wobei $\varepsilon_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ vollständig antisymmetrisch und $\varepsilon_{1,2,\dots,n} = 1$ ist. Zeige, dass $\det(\hat{A}\cdot\hat{B}) = \det(\hat{A})\det(\hat{B})$ und $\det(\hat{A})\det(\hat{A}^{-1}) = 1$ für $\det(A) \neq 0$. (*2,5 points*)

(d) Zeige, dass eine Basistransformation wie folgt auf die Matrix $\hat{A}$ wirken muss

$$\hat{A} \to U\hat{A}U^{-1}, \tag{13}$$

wobei $U \in GL(n,\mathbb{C})\backslash(\det(U) = 0)$. Zeige weiterhin, dass die Determinante invariant unter Basistransformationen ist. (*1,5 points*)

Eigenwerte einer Matrix $\hat{A}$ sind nun die Nullstellen $\lambda_{0,i}$ des *charakteristischen Polynoms* $\chi_{\hat{A}}(\lambda)$

$$\chi_{\hat{A}}(\lambda) = \det\left(\lambda\mathbb{1}_{n\times n} - \hat{A}\right). \tag{14}$$

$\mathbb{1}_{n\times n}$ ist die n-dimensionale Einheitsmatrix und $\lambda \in \mathbb{C}$. Man nennt die Menge von $\{\lambda_{0,i}\}$ das Spektrum von $\hat{A}$. Vektoren $\vec{v}$, welche

$$\hat{A}\vec{v} = \lambda_{0,i}\vec{v} \tag{15}$$

erfüllen, nennt man Eigenvektoren. Alle Eigenvektoren $\vec{v}$ zum Eigenwert $\lambda_{0,i}$, nennt man den Eigenraum von $\lambda_{0,i}$. $\hat{A}$ ist nur diagonalisierbar, falls die Summe der Dimensionen aller Eigenräume gleich n ist. In diesem Fall spannen die Eigenvektoren eine Basis für den Vektorraum auf, auf den $\hat{A}$ wirkt.

(e) Zeige, dass für die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{y}(t) = \hat{A}\vec{y}(t), \tag{16}$$

mit $\vec{y}(t) \in \mathbb{C}^n$ und $\hat{A} \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(n,n)$, durch $y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\vec{v}$ gelöst wird, wenn $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$ die Eigenwerte und Eigenvektoren sind. (*1 point*)

(f) Berechne das Spektrum und die Eigenräume der Matrix $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Gib die Transformationsmatrix U an, welche $\hat{A}$ diagonalsiert. Berechne die Determinante von $\hat{A}$. (*3 points*)

H 3.3 Vektorräume II *(5,5 points)*

(a) Zeige, dass jeder Vektor $\vec{p}$ in einer Orthonormalbasis $\{\vec{e}_i\}$ als $\vec{p} = \sum_i (\vec{e}_i, \vec{p})\vec{e}_i$ geschrieben werden kann, wobei '$(,)$' das Skalarprodukt kennzeichnet. (*0,5 points*)

(b) Betrachten wir den Vektorraum $C_{\mathrm{R}}[-\pi, \pi]$ aller reellwertigen, kontinuierlichen Funktionen, welche auf dem Interval $[-\pi, \pi]$ defniert sind. Die Vektoren e_n mit $n \in \mathbb{Z}$

$$e_n \equiv \begin{cases} \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}; & \text{für} \quad -n \in \mathbb{N}^+ \\ \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}; & \text{für} \quad n \in \mathbb{N}^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}; & \text{für} \quad n = 0 \end{cases}, \tag{17}$$

bilden eine Basis. Zeige, dass $(p, q) \equiv \int_a^b \mathrm{d}x p(x)q(x)$ ein Skalarprodukt definiert. (*1 point*)

(c) Zeige, dass die oben defnierte Basis $\{e_n\}$ eine Orthonormalbasis ist. (*2 points*)

(d) Berechne die Koeffizienten des Vektors $p(x) \in C_{\mathrm{R}}[-\pi, \pi]$ mit $p(x) = x$. (*2 points*)
Hinweis:

$$\int \mathrm{d}x \sin(nx)\cos(mx) = \frac{\cos((m-n)x)}{2(m-n)} - \frac{\cos((m+n)x)}{2(m+n)}$$

$$\int \mathrm{d}x \sin(nx)\sin(mx) = \frac{\sin((m-n)x)}{2(m-n)} - \frac{\sin((m+n)x)}{2(m+n)}$$

$$\int \mathrm{d}x \sin(nx)x = -\frac{x\cos(nx)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2}$$