Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Blatt 4
02 Mai 2014
SS 2014

Übungen zur Quantenmechanik und statistischen Physik

Priv.-Doz. Dr. Stefan Förste

http://www.th.physik.uni-bonn.de/people/forste/exercises/la_tp2/

–Anwesenheitsaufgaben–

A 2.1 Unschärferelation
Es sei der Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{P}^2 - g\frac{1}{\hat{X}} \tag{1}$$

im $\mathbb{R}$ gegeben. Leite aus der Bedingung, dass es eine untere Schranke für die Grundzustandsenergie gibt die "Unschärferelation"

$$\langle \hat{P}^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \langle 1/\hat{X} \rangle^{-1} \geq \hbar \tag{2}$$

her.

–Hausaufgaben–Abgabe: 09.05.2014

H 4.1 Kommutatoren *(11 points)*
Wellenfunktionen $\psi(\vec{x}, t)$ sind Vektoren aus einem Vektorraum auf den Operatoren $\hat{A}$, welche die Observablen der klassischen Mechanik ersetzen, wirken. In Aufgabe **H 3.2** wurde gezeigt, dass die Wirkung eines Operators auf einen Vektor, in der Eigenbasis, durch deren Eigenwerte dargestellt werden kann. Wir benutzen als Basis die *Ortsbasis* , in der die Operatoren für den Ort und Impuls durch

$$\hat{X}_i = x_i \quad \text{und} \quad \hat{P}_i = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{3}$$

gegeben sind. Der Kommutator $[\hat{A}, \hat{B}]$ von zwei Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ sei definiert durch

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \tag{4}$$

Die Operatoren werden als Zeitunabhängig betrachtet.

(a) Überzeuge dich davon, dass der Kommutator von zwei Operatoren wieder ein Operator ist. Berechne die Kommutatoren (*1 point*)

(i) $[\hat{X}, \hat{X}]$,

(ii) $[\hat{P}, \hat{P}]$ und

(iii) $[\hat{X}, \hat{P}]$.

(b) Zeige, dass der Kommutator

(i) linear $[\alpha\hat{A} + \beta\hat{B}, \hat{C}] = \alpha[\hat{A}, \hat{C}] + \beta[\hat{B}, \hat{C}]$,

(ii) antisymmetrisch $[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}]$ und

(iii) die Jacobi-Identität $[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] = 0$ sowie

(iv) die Produktregel $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$

erfüllt. Berechne anschließend den Kommutator $[\hat{X}, \hat{P}^2]$ und $[\hat{P}, \hat{V}(x)]$, wobei $\hat{V}(x)$ als ein Polynom in $\hat{X}$ angesehen werden kann $\hat{V}(x) = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \hat{X}^i$, mit $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{Z}$. *(3 points)*

Die Operatoren für den Drehimpuls $\hat{\vec{L}}$ seien durch

$$\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{x}} \times \hat{\vec{P}} \tag{5}$$

gegeben.

(c) Zeige, dass die Komponenten von $\hat{\vec{L}}$ in der Ortsbasis durch

$$\begin{aligned} \hat{L}_x &= -i\hbar \left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y} \right), \\ \hat{L}_y &= -i\hbar \left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} \right), \\ \hat{L}_x &= -i\hbar \left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

gegeben sind. *(2 points)*

(d) Zeige, dass die Drehimpulse $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ die Kommutatorrelation

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k \tag{6}$$

erfüllt, wobei $i, j, k \in \{x, y, z\}$. Berechne zusätzlich den Kommutator $[\hat{L}_i, \hat{L}^2]$, wobei $\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$ das Quadrat des Gesamtdrehimpulsoperators $|\hat{\vec{L}}|$ ist. *(2 points)*

(e) Durch die Kommutatorrelation können wir die Drehimpulse auch durch Matrizen darstellen. Zeige, dass die Matrizen

$$\sigma_1 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

den Kommutator in (6) erfüllt und somit eine Darstellung für $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ ist. Berechne den Kommutator $[\sigma_i, \sigma^2]$, wobei $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$. *(2 points)*

(f) Wir führen die Operatoren

$$\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i\hat{L}_y \quad \text{und} \quad \hat{L}_- = \hat{L}_x - i\hat{L}_y \tag{8}$$

ein. Berechne die Kommutatoren $[\hat{L}_\pm, \hat{L}_z]$. *(1 point)*

Wir werden später sehen, dass die Kommutatorrelationen sehr nutzlich sein werden, wenn wir die Eigenvektoren zu den Drehimpulsoperatoren suchen.

H 4.2 Delta-Funktionen *(4 points)*

Die *Delta-Distribution* $\delta(x - x_0)$ ist ein sehr nützliches Objekt in der Quantemechanik. Sie sei definiert durch das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \delta(x_0 - x) f(x) = f(x_0), \tag{9}$$

wobei eine beliebige reguläre Funktion $f(x)$ ist.

(a) Zeige, dass die Funktionen

(i) $\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(nx)}{x}$, mit $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$

(ii) $\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{n\to\infty} \frac{\sin^2(nx)}{nx^2}$, mit $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$

(iii) $\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{n\to\infty} n\mathrm{e}^{-n^2x^2}$, mit $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$

(iv) $\delta(x) = \lim_{n\to 0} \begin{cases} 1/n, & \text{für } |x| < n/2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

die Gleichung (9) erfüllen. *(2,5 points)*

(b) Zeige, dass die Integrale der obigen Funktionen für beliebiges n

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \delta(x) = 1 \tag{10}$$

sind. *(0,5 points)*

(c) Zeige, dass $\delta(\alpha x) = \frac{\delta(x)}{|\alpha|}$ gilt, wobei $\alpha \in \mathbb{R}/\{0\}$. *(1 point)*

Die Delta-Distribution wird beispielsweise benutzt um die Zustandsdichte zu beschreiben. Dabei wird ein Zustand durch eine Delta-Distribution ausgedrückt. Für ein System mit N Zuständen beträgt die Zustandsdichte $\rho(\omega) = \sum_{i=1}^{N} \delta(\omega - \omega_0)$. Integriert man über $\mathbb{R}$ erhält man genau die Anzahl der Zustände.

Hinweis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{\sin x}{x} = \pi \tag{11}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{\sin^2 x}{x^2} = \pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

H 4.3 Nochmal eine Welle *(5 points)*

Sei eine Wellenfunktion in der Ortsbasis gegeben durch

$$\psi(x) = \begin{cases} 2\alpha^{3/2} x \mathrm{e}^{-\alpha x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}, \tag{12}$$

mit $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Berechne das Maximum der Wahrscheinlichkeitsdichte. *(1 point)*

(b) Berechne die Mittelwerte von $\hat{X}$ und $\hat{X}^2$. *(1,5 points)*

(c) Wie ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen mit der Wellenfunktion $\psi(x)$ im Interval $x = 0$ bis $x = 1/\alpha$ zu finden? *(1 point)*

(d) Berechne den Mittelwert von $\hat{P}$ und $\hat{P}^2$. *(1 point)*

(e) Berechne zuletzt die Unschärfe $\Delta x \Delta p$. *(0,5 points)*