Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Blatt 6
23 Mai 2014
SS 2014

Übungen zur Quantenmechanik und statistischen Physik

Priv.-Doz. Dr. Stefan Förste

http://www.th.physik.uni-bonn.de/people/forste/exercises/la_tp2/

–Anwesenheitsaufgaben–

A 5.1 Hermite-Polynome

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt

$$H_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \mathrm{e}^{-x^2} \tag{1}$$

das n-te *Hermite-Polynom.*

(a) Zeige, dass die Hermite-Polynome den Koeffizienten der Entwicklung der Funktion

$$w(x,t) = \mathrm{e}^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n, \qquad t \in \mathrm{R} \tag{2}$$

entsprechen. Die Funktion w wird auch die *Erzeugende Funktion* für die Hermite Polynome genannt.

(b) Zeige, dass das n-te Hermite-Polynom die Rekursionsrelation

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

erfüllt.

(c) Zeige, dass die Hermite-Polynome der Differenzialgleichung

$$u'' - 2xu' + 2nu = 0 \tag{4}$$

genügen. Benutze dieses Ergebnis um zu zeigen, dass die Differentialgleichung

$$v'' + (2n + 1 - x^2)v = 0 \tag{5}$$

von der Funktion $v = \mathrm{e}^{-x^2/2} H_n(x)$ gelöst wird.

Ein System von Funktionen $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$ heißt orthogonal auf dem Interval $[a, b]$ mit dem Gewicht $\rho(x)$ wenn für alle m, $n \in \mathbb{N}_0$, $m \neq n$, gilt

$$\int_a^b \rho(x) f_m(x) f_n(x) \mathrm{d}x = 0, \tag{6}$$

wobei $\rho(x)$ eine beliebige von m und n unabhängige nicht-negative Funktion ist.

(f) Zeige, dass die Hermite Polynome auf dem Interval $[-\infty, \infty]$ orthogonal mit dem Gewicht e^{-x^2} sind.

(g) Zeige, dass für $m = n$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} H_n^2(x) \mathrm{d}x = 2^n n! \sqrt{\pi}, \qquad \text{für} \qquad n \in \mathbb{N}_0 \tag{7}$$

ist.

–Hausaufgaben–Abgabe: 28.05.2014

H 7.1 Harmonischer Oszillator mit zusätzlichem Potential *(6 points)*
Wir betrachten ein Teilchen mit der Ladung q und der Masse m, das sich in einem eindimensionalen harmonischen Oszillator-Potential bewegt und zusätzlich einem elektrischen Feld E ausgesetzt ist. Der Hamiltonoperator lautet also

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2 - qE\hat{x}, \tag{8}$$

mit ω der Eigenfrequenz des harmonischen Oszillators.

(a) Zeige, dass sich die Lösung dieses Problems durch die aus der Vorlesung bekannten Lösungen des eindimensionalen harmonischen Oszillators ausdrücken lassen.
Hinweis: Ein konstanter Offset in dem Potential

$$\hat{V}(\hat{x}) \rightarrow \hat{V}(\hat{x}) + const. \tag{9}$$

verändert das Ergebnis nicht. Begründe! *(1,5 points)*

(b) Bestimme die neuen Eigenfunktionen und Energieeigenwerte. *(1,5 points)*

(c) Zeige, dass für ein bestimmtes E_0 die Grundzustandsenergie gleich Null wird. Gib E_0 an. Bedeutet dies, dass die Nullpunktsenergie verschwindet? *(1,5 points)*

(d) Berechne den Erwartungswert $\langle \hat{x} \rangle$ und vergleiche ihn mit dem Erwartungswert im Fall $E = 0$. *(1,5 points)*

H 7.2 Matrizenmechanik *(4 points)*

Eine Observable A sei durch die Matrix

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & i \\ A_{21} & 2 & 1-i \\ A_{31} & A_{32} & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

dargestellt. Das betrachtete System befinde sich in dem Zustand

$$\psi = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{11}$$

(a) Bestimme die Werte für A_{21}, A_{31}, A_{32} und c. (*2 points*)

(b) Bestimme den Erwartungswert für $\hat{A}$. (*1 point*)

(c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, den Wert 2 in einer Messung von $\hat{A}$ zu erhalten? (*1 point*)