

Übungen zur Quantenmechanik und statistischen Physik

Priv.-Doz. Dr. Stefan Förste

http://www.th.physik.uni-bonn.de/people/forste/exercises/la_tp2/

–ANWESENHEITSAUFGABEN–

H 6.1 Drehimpulsoperator in Polarkoordinaten

Seien r, ϕ, z Zylinderkoordinaten. Nimm an, dass die potentielle Energie eines Teilchens nur vom Radius r und nicht von ϕ und z abhängt.

- (a) Zeige, dass der Drehimpulsoperator $\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$ in Zylinderkoordinaten durch

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (1)$$

gegeben ist.

- (b) Drücke den Laplace-Operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ in Zylinderkoordinaten aus.

- (c) Zeige, dass \hat{H} mit \hat{L}_z und \hat{p}_z kommutiert.

- (d) Argumentiere, dass die Eigenfunktion ψ von \hat{H} die Form

$$\psi(r, \phi, z) = f_{m,k}(r) e^{im\phi} e^{ikz} \quad (2)$$

hat, wobei m, k noch zu bestimmen sind.

–HAUSAUFGABEN– Abgabe: 04.06.2014

H 7.1 Kugelkoordinaten und Drehimpulsoperator

(10 points)

Für radialsymmetrische Potentiale $\hat{V}(r)$ (wie das Coulomb-Potential) vereinfachen sich Rechnungen, wenn man mit Kugelkoordinaten rechnet. Kugelkoordinaten seien gegeben durch die Koordinaten $r \in \mathbb{R}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, \pi]$ und können ausgedrückt werden durch

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta. \quad (3)$$

- (a) Drücke die Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ in Kugelkoordinaten aus. Berechne anschließend den Laplace-Operator Δ in Kugelkoordinaten, welcher durch

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial z^2} \quad (4)$$

definiert sei.

(3 points)

- (b) Berechne die Drehimpulsoperatoren $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z, \hat{L}^2$ in Kugelkoordinaten aus. Drücke den Laplace-Operator durch r und den Drehimpulsoperatoren aus. (4 points)
- (c) Zeige, dass der Drehimpuls in einem radialsymmetrischen Potential erhalten ist. (3 points)

H 7.2 Hilbertraum und Eigenfunktionen vom harmonischen Oszillator (10 points)

Der Hilbertraum ist ein vollständiger Vektorraum mit Skalarprodukt. In der Quantenmechanik spielt der Hilbertraum eine wichtige Rolle, da die Wellenfunktionen Vektoren aus dem Hilbertraum sind. Vektoren $\psi(x)$ aus dem Hilbertraum müssen quadratintegrabel sein, d.h. $\int \psi(x)^* \psi(x) dx$ darf nicht divergieren. Die Eigenvektoren eines hermiteschen Operators spannen den Hilbertraum auf und sind daher geeignete Basisvektoren. Betrachten wir den Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators mit

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \hat{x}^2, \quad (5)$$

mit ω der Kreisfrequenz und m der Masse des schwingenden Teilchens.

- (a) Aus der Vorlesung und der Aufgabe **A 5.1** ist bekannt, dass die Eigenfunktionen zum Operator \hat{H} durch

$$\psi_n(x) = \left(2^n n! \sqrt{\frac{\pi \hbar}{m\omega}} \right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} x^2\right) H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x\right) \quad (6)$$

gegeben sind, wobei $H_n(x)$ die Hermite-Polynome sind. Wie viele Dimensionen hat damit der Hilbertraum? Drücke zwei Vektoren $\phi_1(x), \phi_2(x)$ aus dem Hilbertraum in der Eigenbasis von \hat{H} aus und bestimme deren Skalarprodukt. (2 points)

Wir definieren die Operatoren

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{x} + i \sqrt{\frac{1}{\hbar m\omega}} \hat{P} \right), \quad (7)$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{x} - i \sqrt{\frac{1}{\hbar m\omega}} \hat{P} \right).$$

- (b) Sind die Operatoren a, a^\dagger hermitesch? Berechne deren Wirkung auf die Eigenfunktionen aus (6). (2 points)
- (c) Zeige, dass die Eigenfunktionen (6) auch Eigenfunktionen des Operators $a^\dagger a$ sind. Was sind die Eigenwerte μ von $a^\dagger a$? Zeige, dass es eine untere Grenze für μ gibt. Welche ist die zugehörige Eigenfunktion zum niedrigsten Eigenwert? Welchen Eigenwert zum Operator \hat{H} hat diese Eigenfunktion? (2 points)
- (d) Wir werden die Eigenfunktionen von \hat{H} durch deren Eigenwerte zum Operator $a^\dagger a$ in der *Bra-Ket-Notation* benennen. D.h. eine Wellenfunktion $\psi(x)$, welche die Eigenwertgleichung

$$a^\dagger a \psi(x) = n \psi(x) \quad (8)$$

erfüllt, wird durch $|n\rangle$ abgekürzt. Welches ist das zugehörige Hermite-Polynom zum Vektor $|3\rangle$? Berechne $a|n\rangle$ und $a^\dagger|n\rangle$. Welchen Energieeigenwert hat ein Zustand $|n\rangle$? (2 points)

- (e) Berechnen $\langle n|\hat{x}|n\rangle$, $\langle n|\hat{x}^2|n\rangle$, $\langle n|\hat{P}|n\rangle$ und $\langle n|\hat{P}^2|n\rangle$ und folgere daraus die Unschärfere-lation

$$(\Delta x)_n(\Delta p)_n = \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (9)$$

(2 points)

H 7.3 Freies Teilchen auf einem beschränkten Intervall

(10 points)

Ein Teilchen der Masse m bewege sich frei auf einem Intervall der Länge a zwischen zwei unendlich hohen Potentialen (in einer Dimension). Seine Wellenfunktion zum Zeitpunkt $t = 0$ sei

$$\psi(x, 0) = \frac{A}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \sqrt{\frac{3}{5a}} \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right) + \frac{1}{\sqrt{5a}} \sin\left(\frac{5\pi x}{a}\right), \quad (10)$$

wobei A eine reelle Konstante ist.

- (a) Berechne A , sodass $\psi(x, 0)$ normiert ist. (2 points)
- (b) Wenn man Messungen durchführt, welche die Energie bestimmt, welche Werte würde man bestimmen und welche Wahrscheinlichkeit hätten diese? Berechne den Durchschnittswert für die Energie. (3 points)
- (c) Bestimmt die Wellenfunktion $\psi(x, t)$ zu einem späteren Zeitpunkt t . (2 points)
- (d) Bestimme die Wahrscheinlichkeit das Teilchen zum Zeitpunkt t im Zustand $\varphi(x, t) = \sqrt{a/2} \sin(5\pi x/a) \exp(-iEt/\hbar)$ zu finden. (3 points)