Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Blatt 9
06 Juni 2014
SS 2014

Übungen zur Quantenmechanik und statistischen Physik

Priv.-Doz. Dr. Stefan Förste

http://www.th.physik.uni-bonn.de/people/forste/exercises/la_tp2/

–Hausaufgaben–Abgabe: 20.06.2014

H 9.1 Eigenfunktionen des $\hat{L}^2$-Operators *(14 points)*

Die Lösungen einer dreidimensionalen kugelsymmetrischen Schrödingergleichung werden Eigenfunktionen von $\hat{L}^2$ sein, da $[\hat{H}, \hat{L}^2] = 0$. Dabei sei $\hat{L}^2$ in Kugelkoordinaten, wie in der Vorlesung gezeigt, durch

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left(\partial_\theta^2 + \cot\theta\, \partial_\theta + \sin^{-2}\theta\, \partial_\phi^2\right) \tag{1}$$

gegeben, wobei wir die Notation $\frac{\partial}{\partial x} =: \partial_x$ verwendet haben. Die Eigenfunktionen $\psi(r, \theta, \phi)$zum $\hat{L}^2$-Operator seien, wie ebenfalls in der Vorlesung gezeigt, durch

$$\psi(r, \theta, \phi) = f(r) Y_{l,m} = f(r), N_{l,m} P_l^{|m|}(\cos\theta) e^{im\phi}, \tag{2}$$

wobei

$$N_{l,m} = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}}, \quad P_l^m(\xi) = (-1)^m (1-\xi^2)^{\frac{m}{2}} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\xi^m} P_l(\xi), \quad \text{für } 0 \le m \le l, \tag{3}$$

mit

$$P_l(\xi) = \frac{1}{2^l l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}\xi^l} (\xi^2 - 1)^l, \quad \text{für } l = 0, 1, 2, ...; |\xi| \le 1. \tag{4}$$

(a) Rechne explizit die Funktionen $P_0(\cos\theta)$, $P_1(\cos\theta)$, $P_2(\cos\theta)$, $P_3(\cos\theta)$, sowie $P_0^0(\cos\theta)$, $P_1^0(\cos\theta)$, $P_1^1(\cos\theta)$ und anschließend $Y_{0,0}(\theta, \phi)$, $Y_{1,0}(\theta, \phi)$, $Y_{1,\pm 1}(\theta, \phi)$ aus. *(1 point)*

(b) In der Vorlesung wurde bereits erwähnt, dass die Kugelflächenfunktionen $Y_{l,m}$ eine vollständige orthonormale Basis des Hilbertraums bildet. Wir werden die Basisvektoren des Hilbertraums in der Bra-Ket-Notation durch $|l, m\rangle$ abkürzen. Berechne die Wirkung der Leiteroperatoren $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$ auf die Quantenzahlen m und l eines Vektors $|l, m\rangle$. *(2 points)*
Hinweis: Benutze aus `H 4.1` *die Relation* $[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm \hat{L}_\pm$.

(c) Drücke $\hat{L}^2$ durch die Leiteroperatoren und $\hat{L}_z$ aus und argumentiere, dass es eine obere Grenze für die Quantenzahl m gibt. *(2 points)*
Hinweis: $\hat{L}_i^2$ hat positive Eigenwerte.

(d) Welchen Zusammenhang gibt es zwischen dem Eigenwert von $\hat{L}^2$ und dem maximalen Eigenwert von $\hat{L}_z$? Was bedeuten die verschiedenen Quantenzahlen m bei fester Quantenzahl l geometrisch? (*1 point*)

(e) Berechne $\hat{L}_\pm |l, m\rangle$. (*2 points*)

(f) Wir können die Drehimpulsoperatoren (ähnlich wie im Fall des harmonischen Oszillators) durch Matrizen darstellen. Dazu betrachten wir beispielhaft den Hilbertraum eines Teilchens mit $l = 1$. Welche Quantenzahlen sind für m erlaubt? Die Matrixelemente C_{mn} einer Matrix C, welches mit einem Operator $\hat{C}$ assoziiert wird, berechnet sich durch $\langle m|\hat{C}|n\rangle$, wobei $|m\rangle$ und $|n\rangle$ Basisvektoren des Hilbertraums sind. Berechne die matrizen zu $\hat{L}^2$, $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$, $\hat{L}_z$und $\hat{L}_\pm$. (*3 points*)

(g) Berechne die Eigenvektoren der Matrizen assoziiert zu den Operatoren $\hat{L}^2$ und $\hat{L}_z$ und zeige, dass sie orthogonal zueinander sind. (*2 points*)

(h) Berechne $\hat{L}_\pm^3$. Ist das Ergebnis sinnvoll? Begründe! (*1 point*)

H 9.1 Hantelmolekül (*6 points*)

Ein Hantelmolekül rotiert im Raum um den Koordinatenursprung,mit zwei Freiheitsgraden den Polarwinkeln θ und ϕ entsprechend. Es werde durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{1}{2I}\hat{L}^2 \tag{5}$$

mit dem Trägheitstensor I beschrieben.

(a) Gib die Eigenwerte und Eigenfunktionen sowie deren Entartungsgrad an. (*1 point*)

(b) Zu einem bestimmten Zeitpunkt befinde sich der Rotator im Zustand

$$\psi(\theta, \phi) = \alpha\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\,\cos 2\phi\right), \tag{6}$$

mit der Normierungkonstanten α.Mit welcher Wahrscheinlichkeit liefert eine Messung von $\hat{L}^2$ die Werte

$$6\hbar^2,\ 2\hbar^2,\ 0? \tag{7}$$

(*3 points*)

Hinweis:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}},\ Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\theta - 1\right),\ Y_{2\pm2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2 \mathrm{e}^{\pm i2\phi} \tag{8}$$

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt die gleichzeitige Messung von $\hat{L}^2$ und $\hat{L}_z$ das Wertepaar $(6\hbar^2, -2\hbar)$? Ist es überhaupt möglich die beiden Eigenwerte gleichzeitig zu messen? (*2 points*)

$***$*Schöne Pfingstferien!* $***$