Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Probeklausur
02 Juli 2014
SS 2014

Gemischte Aufgaben zur Quantenmechanik und statistischen Physik

Priv.-Doz. Dr. Stefan Förste

http://www.th.physik.uni-bonn.de/people/forste/exercises/la_tp2/

Diese Aufgaben soll zur Überprüfung des eigenen Wissens dienen. Die Klausur muss nicht notwedigerweise in Umfang, Schwierigkeitsgrad und abgedeckten Themen dieser Aufgaben gleichen.

Aufgabe 1

Seien zwei Matrizen durch

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix} \tag{1}$$

gegeben.

(a) Können diese Matrizen physikalische Observable darstellen? Begründe und falls ja, bestimme die möglichen Messwerte.

(b) Berechne den Kommutator von A und B.

(c) Berechne den Kommutator von dem Impulsoperator und eines Operators $\hat{K}$, mit $\hat{K} = \alpha\hat{x} + \beta\hat{x}^2$, α, $\beta \in \mathbb{R}$.

(d) Wie lautet die eindimensionale stationäre Schrödingergleichung und was für eine physikalische Bedeutung haben die einzelnen Terme.

(e) Finde einen Lösungsansatz für die Wellenfunktion der stationären Schrödingergleichung mit konstantem Potential $V(x) = V_0 = \text{konst.}$

(f) Beschreibe die physikalische Bedeutung einer quantenmechanischen Wellenfunktion.

Aufgabe 2

In einem dreidimensionalen Hilbertraum sind folgende Zustände gegeben:

$$|\alpha\rangle = i|1\rangle - 2|2\rangle - i|3\rangle, \quad |\beta\rangle = i|1\rangle + 2|3\rangle. \tag{2}$$

Dabei sind $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ die orthonormierten Basiszustände.

(a) Berechne das Skalarprodukt $\langle\alpha|\beta\rangle$ und $\langle\beta|\alpha\rangle$ und zeige, dass $\langle\alpha|\beta\rangle^* = \langle\beta|\alpha\rangle$ gilt.

(b) Finde alle Matrixelemente des Operators $\hat{A} = |\alpha\rangle\langle\beta|$ und gebe die Matrixdarstellung von $\hat{A}$ an.

(c) Ist der Operator $\hat{A}$ hermitesch? Begründe!

Aufgabe 3
Wir betrachten einen eindimensionalen harmonischen Oszillator mit dem Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega^2\hat{x}^2}{2}, \tag{3}$$

mit den Energieeigenzuständen $|n\rangle$ zu den Energieeigenwerten $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ mit $n \in \{0, 1, 2, ...\}$. Zur Zeit $t = 0$ sei der Zustand durch

$$|\psi(t = 0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - i\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \tag{4}$$

gegeben.

(a) Gib $|\psi(t)\rangle$ für $t \neq 0$ an.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird jeweils die Energie E_0, E_1 und E_2 gemessen?

(c) Berechne die Erwartungswerte von Ort x und Impuls p bezüglich $|\psi(t)\rangle$.

(d) Berechne die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(x,t)|^2$.

Aufgabe 4
Sei der Zustand eines Teilchens gegeben durch

$$\psi(x, y, z) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{r^2} + \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{xz}{r^2}, \tag{5}$$

wobei $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ist.

(a) Berechne $\hat{\vec{L}}^2\psi(x, y, z)$ und $\hat{L}_z\psi(x, y, z)$. Wie lautet der Gesamtdrehimpuls des Teilchens?

(b) Berechne $\hat{L}_+\psi(x, y, z)$ und $\langle\psi|\hat{L}_+|\psi\rangle$.

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit würde man für die z-Komponente des Drehimpulses die Werte 0, $\hbar$ und $-\hbar$ messen?

Hinweis:

$$Y_{20}(x, y, z) = \sqrt{5/16\pi}(3z^2 - r^2)/r^2, \qquad Y_{2\pm1}(x, y, z) = \mp\sqrt{15/8\pi}(x \pm iy)z/r^2 \tag{6}$$

Aufgabe 5

Ein Teilchen der Masse m bewege sich frei innerhalb eines unendlich tiefen Kastenpotentials der Länge a und sei zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand

$$\psi(x,\, t=0) = \sqrt{\frac{3}{5a}} \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right) + \frac{1}{\sqrt{5a}} \sin\left(\frac{5\pi x}{a}\right) \tag{7}$$

(a) Bestimme den Zustand $\psi(x,\, t')$ des Teilchens zu einem späteren Zeitpunkt $t = t'$.

(b) Berechne die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x,\, t)$ und die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\vec{J}(x,\, t)$.

(c) Überprüfe, ob die Wahrscheinlichkeit erhalten ist z.B. durch $\partial\rho/\partial t + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$.

Aufgabe 6

Ein quantenmechanisches System von Spin-1/2 Teilchen sei wie folgt präpariert: Der Zustand $|0\rangle$ komme mit der Wahrscheinlichkeit $P(|0\rangle) = 1/3$, der Zustand $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ komme mit der Wahrscheinlichkeit $P(|+\rangle) = 2/3$ vor. Hierbei sind

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

die Eigenzustände vom Operator $\hat{s}_z = \hbar/2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ mit Eigenwerten $+\hbar/2$ und $-\hbar/2$.

(a) Bestimme den Dichteoperator für dieses Ensemble.

(b) Beschreibt er einen reinen oder gemischten Zustand?

(c) Berechne den Erwartungswert $\langle\vec{\sigma}\rangle = (\langle\vec{\sigma}_x\rangle,\, \langle\vec{\sigma}_y\rangle,\, \langle\vec{\sigma}_z\rangle)$, wobei

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad s_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

die Paulischen Spinmatrizen sind.