
Theoretische Physik IV

Priv.Doz. Dr. S. Förste

– Probeklausur –

Bitte beachten:

- (i) Diese Probeklausur dient als Orientierungshilfe für die Klausur. Es sind nicht notwendigerweise alle klausurrelevanten Themen abgedeckt. Ebenso hat die Klausur nicht zwangsweise einen vergleichbaren Umfang zu dieser Probeklausur.
- (ii) Die Klausur findet am 15.02.2012 von 09:00 s.t. bis 12:00 s.t. im Wolfgang-Paul-Hörsaal statt.
- (iii) Die Nachklausur findet am 28.03.2013 von 09:00 s.t. bis 12:00 s.t. im Wolfgang-Paul-Hörsaal statt.

1.) Quickies

Gib eine kurze Antwort zu den folgenden Fragen/Aufgaben.

- (a) Unterscheide die drei in der Vorlesung besprochenen Ensembles. Benenne jeweils die unabhängigen Variablen sowie die zugehörige thermodynamische Funktion und gib die Dichtematrix an.
- (b) Was sind die drei Hauptsätze der Thermodynamik?
- (c) Zwei isolierte Systeme mit Energien E_1 und E_2 werden in thermischen Kontakt gebracht, das heißt Energieaustausch zwischen den beiden Systemen ist möglich, Volumen und Teilchenzahlen der beiden Systeme bleiben aber konstant. Wir betrachten das System im klassischen mikrokanonischen Ensemble. Wie lässt sich die Energie des ersten Systems im Gleichgewichtszustand bestimmen? Zeige, dass die Temperaturen der beiden Systeme im Gleichgewicht übereinstimmen.
- (d) Beschreibe den Carnot Prozess und gib seinen Wirkungsgrad an. Was zeichnet diesen thermodynamischen Kreisprozess aus?
- (e) Gib eine Klassifizierung von Phasenübergängen an.
- (f) Gib die Gibbs-Duhem Relation in integraler Form an. Was ist ihr physikalischer Ursprung?

2.) Bewegliche harmonische Oszillatoren

Wir betrachten ein klassisches System von N ($N \gg 1$) identischen, unterscheidbaren, nicht gekoppelten eindimensionalen harmonischen Oszillatoren, die sich frei auf

einer zweidimensionalen Fläche der Größe A bewegen können. Die Hamiltonfunktion ist also durch

$$H(q_\nu, p_\nu) = \sum_{\nu=1}^N \frac{p_\nu^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 (q_{\nu,3})^2$$

gegeben, wobei q_ν und p_ν die dreidimensionalen Orts- und Impulsvektoren des ν -ten Teilchens sind.

(a) Zeige, dass das Phasenraumvolumen durch

$$\bar{\Omega}(E) = \frac{1}{(2N)!} \left(\frac{A}{2\pi} \right)^N \left(\frac{E}{\omega \hbar} \right)^N \left(\frac{mE}{\hbar^2} \right)^N$$

gegeben ist.

Das Volumen einer N -dimensionalen Kugel mit Radius R ist durch $V_N(R) = \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)N/2} R^N$ gegeben.

- (b) Berechne die Entropie sowie die thermische und die kalorische Zustandsgleichung.
- (c) Berechne das chemische Potential sowie die Wärmekapazitäten bei konstantem Druck und konstanter Fläche.
- (d) Zwei Kopien des obigen Systems mit Teilchenmassen m_1 und m_2 werden in thermischen Kontakt gebracht. Energieaustausch zwischen den Systemen sei also möglich, während Teilchenzahl und Fläche beider Systeme konstant bleiben. Berechne die Gleichgewichtsenergie des ersten Systems, E_1 .

3.) Rotationen zweiatomiger Moleküle

Wir betrachten die klassische Rotation von N freien, nicht wechselwirkenden Molekülen die aus zwei unterscheidbaren Atomen mit Massen m_1 und m_2 bestehen, die den Abstand R haben. Dabei betrachten wir die Moleküle als fest, das heißt wir vernachlässigen ihre Schwerpunktsbewegung ebenso wie ihre Oszillationen. In Kugelkoordinaten lautet die Hamiltonfunktion eines Moleküls dann

$$H(\theta, \phi, p_\theta, p_\phi) = \frac{p_\theta^2}{2\mu R} + \frac{p_\phi^2}{2\mu R^2 \sin^2 \theta},$$

wobei die reduzierte Masse durch

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

gegeben ist.

(a) Zeige, dass die kanonische Zustandssumme $Z_{\text{rot.}}$ dieses Systems durch

$$Z_{\text{rot.}} = \frac{1}{N!} \left[\frac{2\mu R^2}{\hbar^2 \beta} \right]^N$$

gegeben ist.

(b) Warum hängt die Zustandssumme nicht vom Volumen des Systems ab?

- (c) Berechne die Entropie, die innere Energie und die spezifische Wärmekapazität.
- (d) Wie ändert sich die Rechnung und das Ergebnis von Aufgabe (a) wenn die beiden Atome des Moleküls nicht unterscheidbar sind?
- (e) Berechne das chemische Potential.

4.) Clausius-Rankine-Kreisprozess

Betrachte den Clausius-Rankine-Zyklus, der in Abbildung 1 dargestellt ist. Er be-

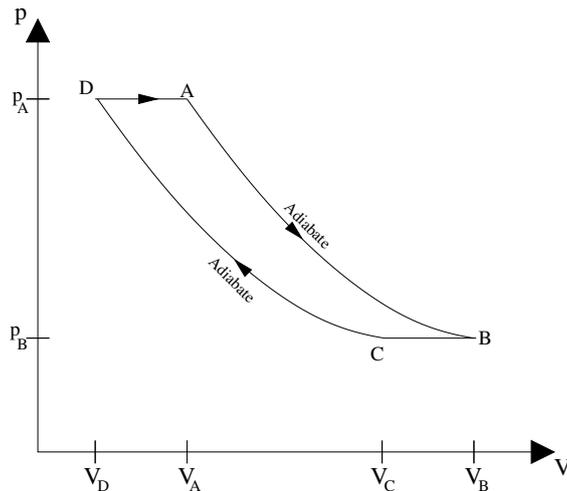


Abbildung 1: Clausius-Rankine-Zyklus im p - V -Diagramm.

steht aus den vier Schritten

- (i) adiabatische Expansion,
- (ii) isobare Abkühlung,
- (iii) adiabatische Kompression,
- (iv) isobare Erwärmung.

Berechne, unter der Annahme dass die Arbeitssubstanz ein ideales Gas ist, für jeden Teilschritt des Zyklus die Arbeit und die Wärmeänderung und zeige, dass der Wirkungsgrad durch

$$\eta = 1 - \frac{p_B V_B}{p_A V_A}$$

gegeben ist.

5.) Thermisches Photonengas

Für das thermische Photonengas lautet die freie Energie

$$F = -\frac{4\sigma}{3c}VT^4$$

und die mittlere Photonenzahl

$$N = 0,244 \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 V,$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit und $\sigma = k^4 \pi^2 / 60 c^2 \hbar^3$ die Stefan-Boltzmann-Konstante bezeichnet.

- (a) Gib die thermische und die kalorische Zustandsgleichung an.
- (b) Berechne die Wärmekapazität bei konstantem Volumen.
- (c) Wie lautet die Entropie als Funktion ihrer natürlichen Variablen?
- (d) Berechne das chemische Potential. Interpretiere dein Ergebnis physikalisch.
- (e) Gib den Druck als Funktion von Volumen und innerer Energie an.
- (f) Gib die Adiabatangleichung dieses Gases in der p - V -Ebene an.
- (g) Berechne den Wirkungsgrad des Carnot-Prozesses explizit, wenn das Arbeitsmedium ein thermisches Photonengas ist.

6.) Thermodynamische Relationen

Wir betrachten ein beliebiges thermodynamisches System.

- (a) Zeige, dass der Joule-Thompson Koeffizient die Relation

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_H = \frac{V}{C_p} (T\alpha - 1)$$

erfüllt, wobei α der thermische Ausdehnungskoeffizient. Was ergibt sich für ein ideales Gas?

- (b) Zeige, dass die Relation

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_S = -\frac{T}{C_V} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$$

erfüllt ist.

Nützliche Relationen und Definitionen:

Gammafunktion:

$$N! = \Gamma(N + 1) = \int_0^\infty x^N e^{-x} dx, \quad N! \approx \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N}.$$

Volumen der N -Dimensionalen Sphäre mit Radius R :

$$V_N(R) = \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2) N/2} R^N.$$

Thermodynamische Definitionen:

$$C_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{V,N} ,$$

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_{T,N} ,$$

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{P,N} .$$

$$C_p = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{p,N} ,$$

$$\kappa_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_{S,N} ,$$

Nützliche Integrale:

$$\int_0^1 dx x^n (1-x)^n = \frac{n!}{(2n)!} \quad \text{falls} \quad n \geq 0 .$$