Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Übungsblatt 1
12. Oktober 2012
WS 12/13

Übungen zu Theoretische Physik IV

Priv.-Doz. Dr. Stefan Förste

http://www.th.physik.uni-bonn.de/people/forste/exercises/ws1213/tp4

–Anwesenheitsübungen–

A 1.1 Reminder: Wahrscheinlichkeitstheorie

Wir beginnen mit einem Reminder zum Thema Wahrscheinlichkeitstheorie. Dabei sollen die grundlegenden, für die statistische Physik wichtigen Begriffe wiederholt werden.

(a) Unter der *Ereignismenge* E eines Zufallsexperiments versteht man die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments. Eine *Zufallsvariable* ist dann eine Abbildung $X : E \to \Omega$, wobei Ω eine Menge ist. Gib eine mögliche Zufallsvariable für das Zufallsexperiments des zweifachen Würfelns an.

(b) Die *Wahrscheinlichkeitsverteilung* P_X der Zufallsvariable X ist eine Abbildung $P_X : \Omega_X \to [0,1] \subset \mathbb{R}$, für die die Normierungseigenschaft

$$\sum_{e \in E} P_X(x(e)) = 1$$

erfüllt ist und die die Wahrscheinlichkeit angibt, dass die Zufallsvariable X einen bestimmten Wert annimmt. Berechne die Wahrscheinlichkeitsverteilung der in (a) definierten Zufallsvariable und prüfe ihre Normierung.

(c) Bei unbegrenzter Wiederholung eines Zufallsexperiments ist der Mittelwert der Zufallsvariablen X durch den *Erwartungswert*

$$\langle X \rangle \equiv \sum_{e \in E} x(e) \cdot P_X(x(e))$$

gegeben. Berechne den Erwartungswert der in (a) definierten Zufallsvariable.

(d) Das *Schwankungsquadrat* einer Zufallsvariable ist definiert als

$$(\Delta X)^2 \equiv \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle$$

und beschreibt das Quadrat der mittleren Abweichung einer Zufallsvariable von ihrem Erwartungswert. Zeige, dass

$$(\Delta X)^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$$

gilt.

(e) Um die (Un-)Abhängigkeit zweier Zufallsvariablen X_i und X_j zu beschreiben, definiert man den *Korrelationskoeffizienten*

$$K_{ij} \equiv \langle (X_i - \langle X_i \rangle)\,(X_j - \langle X_j \rangle) \rangle\,.$$

Dabei gelten die beiden Zufallsvariablen als unabhängig (unkorreliert) wenn der Korrelationskoeffizient verschwindet. Betrachte dazu die folgenden Zufallsexperimente

- Ein Würfel wird zwei mal geworfen. Die Ergebnismenge ist $E = \{(1,1),(1,2),\ldots,(6,6)\}$ und wir definieren zwei Zufallsvariablen $X_1^1 : (a,b) \mapsto a$ und $X_2^1 : (a,b) \mapsto b$.
- Ein Physiker schießt zwei mal auf eine Torwand. Die Wahrscheinlichkeit eines Treffers beim ersten Schuss ist 50%. Trifft der Physiker beim ersten Schuss, so ist die Wahrscheinlichkeit eines Treffers beim zweiten Schuss wieder 50%. Andernfalls wird der Physiker allerdings nervös und die Wahrscheinlichkeit eines Treffers beim zweiten Schuss sinkt auf 25%. Wir definieren wieder zwei Zufallsvariablen: X_1^2 ist 1 im Falle eines Treffers beim *ersten* Schuss und 0 sonst; X_2^2 ist 1 im Falle eines Treffers beim *zweiten* Schuss und 0 sonst.

Berechne die Korrelationsfunktionen von X_1^1, X_2^1 sowie von X_1^2, X_2^2.

(f) Bis jetzt haben wir einfach ausgeführte Zufallsexperimente betrachtet. Führt man ein Zufallsexperiment mehrfach durch, so kann man nach der Wahrscheinlichkeit fragen, dass eine Zufallsvariable X die Werte x_i mit Wahrscheinlichkeit $P_X(x_i) \equiv p_i$ bei k_i von N durchführungen annimmt (dabei ist $i = 1,\ldots,n$ und $\sum_i k_i = N$). Diese Wahrscheinlichkeit ist durch die *Multinomialverteilung*

$$P(\{p_i\},\{k_i\}) = \begin{cases} \frac{N!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}\, p_1^{k_1}\, p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n}, & \text{falls} \quad \sum_i k_i = N, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Als Spezialfall der Multinomialverteilung ergibt sich für *Bernoulli-Prozesse*, das heißt Experimente mit genau zwei mögliche Ergebnissen, die Binomialverteilung

$$B(p,k) = \binom{N}{k}\, p^k (1-p)^{N-k}.$$

$B(p,k)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X den Wert x in k von N Fällen annimmt und p ist die Wahrscheinlichkeit, dass X den Wert x bei einfachem ausführen des Zufallsexperiments annimmt.

Berechne Erwartungswert und Schwankungsquadrat der Zufallsvariable k mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung $B(p,k)$.

Tipp: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, a^k b^{n-k}$

A 1.2 Reminder: Quantenmechanik

Nun ein Reminder zum Thema Quantenmechanik. Dabei sollen auch hier die grundlegenden Begriffe wiederholt werden die im Rahmen der Quantenstatistik wichtig werden.
Die klassischen Observablen wie z.B. Ort x und Impuls p werden in der Quantenmechanik durch hermitesche Operatoren ersetzt die auf die Zustände des *Hilbertraums* wirken. Wenn

ein System sich im Zustand $|\Psi\rangle$ befindet, ist der *Erwartungswert* der Observablen O bei einer Messung durch $\langle\Psi|O|\Psi\rangle$ gegeben. Durch Projektion des Zustands $|\Psi\rangle$ auf Eigenvektoren eines Operators O, kann die (komplexe) Wellenfunktion $\Psi(o) = \langle O|\Psi\rangle$, definiert werden, deren Betragsquadrat die *Wahrscheinlichkeitsdichte* $P(o) = |\Psi(o)|^2$ für die Messung der Observablen O ergibt. Aus der Normierung der Zustände des Hilbertraumes folgt dabei sofort die Normierungseigenschaft der Wahrscheinlichkeitsdichte. Die zeitliche Entwicklung eines Zustands wird durch die *Schrödingergleichung* $\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\Psi\rangle = H|\Psi\rangle$ beschrieben. Dabei ist der Hamiltonoperator H der Operator mit dem die Energie eines Zustandes gemessen wird.

(a) Zeige, dass für den Erwartungswert des Ortsoperators, $\langle X\rangle = \int x\Psi^*(x)\Psi(x)\mathrm{d}x$ gilt. Dies ist die kontinuierliche Form des Erwartungswertes wie wir ihn in Aufgabe A 1.1 definiert haben.

(b) Bei einer Messung der Observablen O wird der quantenmechanische Zustand $|\Psi\rangle$ auf einen Eigenzustand des Operators O abgebildet (Kollaps der Wellenfunktion). Als Konsequenz ist es beispielsweise unmöglich Ort und Impuls eines Teilchens gleichzeitig beliebig genau zu messen. Falls zwei Operatoren jedoch kommutieren, ist es möglich eine gemeinsame Eigenbasis dieser Operatoren zu finden. Quantenmechanisch bedeutet dies, dass die Messungen der beiden dazugehörigen Observablen sich nicht beeinflussen. Zeige, für zwei nicht kommutierende Operatoren A und B, dass folgende Unschärferelation erfüllt ist

$$\frac{1}{2}\left(\langle AB\rangle - \langle BA\rangle\right) \leq \Delta A \cdot \Delta B.$$

Dabei ist ΔA die Wurzel des Schwankungsquadrats der Observablen (Zufallsvariablen) A.

Betrachte als Beispiel für ein quantenmechanisches System den harmonischen Oszillator. Der Hamiltonoperator ist gegeben durch

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2,$$

wobei m die Masse des Oszillators und ω die Oszillationsfrequenz beschreibt.

(c) In diesem Kontext erweist es sich als praktisch zwei neue Operatoren a und $a^\dagger$ gemäß

$$a \equiv \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} X + \mathrm{i}\left(\frac{1}{2m\omega\hbar}\right)^{1/2} P,$$
$$a^\dagger \equiv \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} X - \mathrm{i}\left(\frac{1}{2m\omega\hbar}\right)^{1/2} P$$

zu definieren. Zeige, ausgehend von der kanonischen Kommutatorrelation, $[X, P] = i\hbar$, dass $\left[a, a^\dagger\right] = 1$ gilt und drücke den Hamiltonoperator durch a und $a^\dagger$ aus.

(d) Definiere nun den Operator $N \equiv a^\dagger a$ und die dazugehörigen (normierten) Eigenzustände $N|n\rangle = n|n\rangle$. Zeige, dass

$$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\,,$$
$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

gilt.

(e) Betrachte nun einen Zustand[1] $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|n\rangle + |n+1\rangle\right)$. Zeige, dass

$$\langle\Psi|X(t)|\Psi\rangle \propto \cos(ft),$$

mit einer Konstante f gilt. In dynamischen Systemen kann der Erwartungswert einer Observablen, bzw. Zufallsvariablen also zeitabhängig sein.

(f) Berechne außerdem den Erwartungswert $\langle X^2(t)\rangle$ und das Schwankungsquadrat $(\Delta X(t))^2$.

–Hausübungen–

H 1.1 Spinsystem *5 Punkte*

Betrachte ein System aus N wechselwirkungsfreien Teilchen die jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit im Zustand $|\uparrow\rangle$ oder im Zustand $|\downarrow\rangle$ sein können.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit genau k Teilchen im Zustand $|\uparrow\rangle$ zu finden?

(b) Die Magnetisierung M sei durch $M \equiv 2k - N$ definiert. Berechne die mittlere Magnetisierung und ihr Schwankungsquadrat.

H 1.2 Binomial- und Poissonverteilung *5 Punkte*

Zeige, dass für $N \to \infty$, $p \to 0$, wobei $\mu = Np$ konstant gehalten wird, die Binomialverteilung $B(k,p)$ in die *Poissonverteilung* übergeht:

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ p\to 0 \\ Np=\text{const.}}} B(k,p) = \frac{\mu^k}{k!}\mathrm{e}^{-\mu}.$$

Tipp: $\lim_{p\to 0}(1-p)^{-\frac{1}{p}} = \mathrm{e}$

H 1.3 Betrunkene Physiker *10 Punkte*

Nach der Physikerparty[2] im Wintersemester 2012/2013 verlassen zwei betrunkene Studenten das Carpe Noctem. Sie starten beide am Ausgang und für beide ist die Wahrscheinlichkeit einen Schritt nach links zu machen genauso groß wie die, einen Schritt nach rechts zu machen. Ihre (gleich großen) Schritte machen sie immer gleichzeitig.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie sich nach N Schritten k mal auseinander und l mal aufeinander zubewegt haben?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie sich nach N Schritten wieder treffen?

[1] Im Heisenberg-Bild sind die Zustände zeitunabhängig, dafür hängen die Operatoren von der Zeit ab: Ist der Hamiltonoperator selbst zeitunabhängig, so ist die zeitliche Entwicklung eines Operators $O(t)$ durch $O(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht/\hbar}\, O\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht/\hbar}$ gegeben.

[2] am 17.10.2012 ab 22:00Uhr