Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Übungsblatt 2
19. Oktober 2012
WS 12/13

# Übungen zu Theoretische Physik IV

Priv.-Doz. Dr. Stefan Förste

http://www.th.physik.uni-bonn.de/people/forste/exercises/ws1213/tp4

## –Anwesenheitsübungen–

**A 2.1 Sattelpunktmethode**
Im Rahmen der statistischen Physik ist es oft notwendig Integrale der Form

$$I = \lim_{N\to\infty} \int_a^b \mathrm{e}^{Nf(x)} \mathrm{d}x$$

zu lösen. Ist $f(x)$ auf dem Intervall $[a,b]$ eine analytische Funktion mit einem globalen Maximum bei $x_0 \in (a,b)$, so gilt

$$I = \lim_{N\to\infty} \mathrm{e}^{Nf(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{N|f''(x_0)|}}, \qquad \text{mit} \quad f''(x_0) \equiv \left.\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\right|_{x=x_0}.$$

Zeige mithilfe der Sattelpunktmethode die Stirling-Formel

$$N! \to \sqrt{2\pi N} N^N \mathrm{e}^{-N} \qquad \text{für} \quad N \to \infty$$

*Tipp: Benutze die Integraldarstellung der Gammafunktion* $N! = \Gamma(N+1) = \int_0^\infty x^N \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$.

**A 2.2 Ensemble quantenmechanischer harmonischer Oszillatoren**
Wir betrachten ein System von $N$ unterscheidbaren, wechselwirkungsfreien, quantenmechanischen, harmonischen Oszillatoren mit gleicher Winkelfrequenz $\omega$. Die Zustände des Gesamtsystems sind dann gegeben durch Tensorprodukte der Einzelzustände

$$|n_1, n_2, \ldots, n_N\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes \cdots \otimes |n_N\rangle .$$

Wir schreiben abkürzend

$$a_i \equiv \mathbb{1}^{\otimes(i-1)} \otimes a \otimes \mathbb{1}^{\otimes(N-i)} = \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1} \otimes \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{te Stelle}}}{a} \otimes \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}$$

für den *Absteigeoperator* des $i$ten Teilchens (für $a_j^\dagger$, $N_j$, $H_j$ gelten analoge Definitionen). Der Hamiltonoperator des Gesamtsystems ist gegeben durch

$$H = \sum_{j=1}^{N} \hbar\omega \left( a_j^\dagger a_j + \frac{1}{2} \right).$$

Betrachte zuerst den Fall $N = 3$. Das System habe außerdem die Gesamtenergie $E = \frac{9}{2}\hbar\omega$.

(a) Durch wieviele Zustände lässt sich dieser Wert der Energie realisieren?

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit $p(\epsilon)$ findet man einen ausgewählten Oszillator mit der Energie $\epsilon$?

Wir wollen nun die Anzahl der Zustände bei einem festen Wert der Energie $E$ bei einer großen Anzahl von Oszillatoren $N \gg 1$ bestimmen. Sie ist gegeben durch

$$\Omega(E) \equiv \mathrm{Sp}\ \delta(E-H).$$

(c) Gib $\Omega(E)$ für das betrachtete System an.

(d) Zeige, dass

$$\Omega(E) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}kE} \left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\hbar\omega/2}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\hbar\omega}}\right)^N$$

und weiter, dass

$$\Omega(E) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\ \mathrm{e}^{N(\mathrm{i}k(E/N)-\log(2\mathrm{i}\sin(k\hbar\omega/2)))}.$$

(e) Dieses Integral kann mit der Sattelpunktmethode berechnet werden. Zeige, dass $\Omega(E)$ durch

$$\Omega(E) = \exp\left\{N\left[\frac{\frac{E}{N}+\frac{1}{2}\hbar\omega}{\hbar\omega}\log\frac{\frac{E}{N}+\frac{1}{2}\hbar\omega}{\hbar\omega} - \frac{\frac{E}{N}-\frac{1}{2}\hbar\omega}{\hbar\omega}\log\frac{\frac{E}{N}-\frac{1}{2}\hbar\omega}{\hbar\omega}\right]\right\}$$

gegeben ist.

## –Hausübungen–

**H 2.1 Spinpräzession eines Spin-1/2 Teilchen** *(5+5=10) Punkte*

Der Hamiltonoperator eines Spin-1/2 Teilchen im homogenen Magnetfeld $B$ ist durch

$$H = -\frac{\gamma}{2}\hbar\sum_{j=1}^{3}\sigma_j B_j$$

gegeben, wobei $\gamma$ die gyromagnetische Konstante und $\sigma_i$ $(i=1,2,3)$ die Pauli-Matrizen sind.

Für die zeitliche Änderung der Polarisation gilt:

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} = \frac{\partial\langle\sigma_i\rangle}{\partial t}.$$

Dabei ist $\sigma_i$ als Operator in der Spin-1/2 Darstellung der Drehgruppe zu verstehen.

(a) Drücke die zeitliche Änderung der Polarisation durch die Dichtematrix $\rho(t)$ aus und zeige

$$\mathrm{i}\frac{\partial P_i}{\partial t} = -\frac{\gamma}{2}\sum_j B_j \,\mathrm{Sp}\left([\sigma_i, \sigma_j]\rho\right).$$

(b) Zeige die *Bloch-Gleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t}P = \gamma\,(P \times B)\,.$$

*Tipp:* $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\sum_k \sigma_k \epsilon_{ijk}$.

**H 2.2 Spin-Ensemble** *(4+2+2+2=10) Punkte*

Betrachte ein System von $N$ ($N \gg 1$) wechselwirkungsfreien Spin-1/2 Teilchen in einem konstanten Magnetfeld $B$. Jedes der Teilchen besitzt ein magnetisches Moment $\mu$, das in Richtung oder in Gegenrichtung des Feldes zeigen kann. Es sei $n_1$ die Anzahl der in Feldrichtung, $n_2$ die Anzahl der gegen Feldrichtung ausgerichteten magentischen Momente. Die Energie des Systems ist dann durch $E = -(n_1 - n_2)\mu B$ gegeben.

(a) Zeige, dass die Anzahl der Zustände im Energiebereich zwischen $E$ und $E + \delta E$ näherungsweise durch

$$\omega(E, \delta E) = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2} - \frac{E}{2\mu B}\right)!\left(\frac{N}{2} + \frac{E}{2\mu B}\right)!}\frac{\delta E}{2\mu B}$$

gegeben ist. Dabei sei $E \gg \delta E \gg \mu B$.
*Tipp: Wie groß ist der Abstand zweier Energieniveaus?*

(b) Benutze die Stirling-Formel aus Aufgabe A 2.1 um eine Näherungsformel für $\ln\omega(E, \delta E)$ anzugeben.

(c) Betrachte die Funktion $\ln f(n_1) \equiv \ln\left(\frac{N!}{n_1!(N-n_1)!}\right)$ als kontinuierliche Funktion. Die Taylorreihe bis zur zweiten Ordnung um das Maximum $n_{1,\max}$ lautet dann

$$\ln f(n_1) = \ln f(n_{1,\max}) + \frac{1}{2}(n_1 - n_{1,\max})^2 \left.\frac{\partial^2 \ln f(n_1)}{\partial n_1^2}\right|_{n_1 = n_{1,\max}}.$$

Berechne, unter Benutzung der Näherung $\ln n! \approx n\ln n - n$, das Maximum $n_{1,\max}$, sowie $\left.\frac{\partial^2 \ln f(n_1)}{\partial n_1^2}\right|_{n_1 = n_{1,\max}}$.

(d) Benutze die exponentierte Form der Taylorreihe von $\ln f(n_1)$ um zu zeigen, dass $\omega(E, \delta E)$ näherungsweise durch die Gauß-Verteilung

$$\omega(E, \delta E) = 2^N\sqrt{\frac{2}{\pi N}}\frac{\delta E}{2\mu B}\exp\left[-\frac{2}{N}\left(\frac{E}{2\mu B}\right)^2\right]$$

gegeben ist.