Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Übungsblatt 3
26. Oktober 2012
WS 12/13

Übungen zu Theoretische Physik IV

Priv.-Doz. Dr. Stefan Förste

http://www.th.physik.uni-bonn.de/people/forste/exercises/ws1213/tp4

–Anwesenheitsübungen–

A 3.1 Ableitungen in der mehrdimensionalen Analysis

In dieser Aufgabe sollen einige wichtige Begriffe aus der mehrdimensionalen (reellen) Analysis wiederholt werden. Dazu betrachten wir eine vektorwertige Abbildung $f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ mit l Komponenten $f^a(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, die von n reellen Variablen abhängt, also eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$. Die einfachste und natürlichste Verallgemeinerung des Ableitungsbegriffs aus der eindimensionalen Analysis ist die *partielle Ableitung*,

$$\frac{\partial}{\partial x^i} f^a(x^1, \ldots, x^n) \equiv \lim_{h\to 0} \frac{f^a(x^1, \ldots, x^i + h, \ldots, x^n) - f^a(x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^n)}{h} ,$$

in der man die Variation einer Komponente der Abbildung in Richtung einer einzelnen Koordinate betrachtet, während alle anderen Koordinaten konstant gehalten werden[1]. Betrachtet man nun eine zweite Abbildung $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, sowie die Hintereinanderausführung $h = f \circ g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ von f und g, so gilt für die partiellen Ableitungen von h die *Kettenregel*

$$\frac{\partial h^i}{\partial x^j}(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial y^k}(g(p)) \frac{\partial g^k}{\partial x^j}(p) , \qquad i = 1, \ldots, l,\ j = 1, \ldots, m .$$

Fortan interessieren wir uns insbesondere für den Fall $l = 1$, das heißt für reellwertige Funktionen $f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$.

Natürlich ist man im allgemeinen nicht an der Variation einer Abbildung in Richtung einer einzelnen Koordinate, sondern in Richtung eines beliebigen Vektors interessiert. Dafür definiert man die *Richtungsableitung* entlang eines Einheitsvektors $v \in \mathbb{R}^n$,

$$D_v f(p) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(p + tv)\bigg|_{t=0} .$$

(a) Zeige, dass $D_v f(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^k}(p) v^k$.

Wir wollen nun das totale Differential der Funktion f definieren, der in der Thermodynamik eine zentrale Rolle spielt. Dazu müssen wir allerdings zuerst den Begriff der Linearform einführen. Betrachte dazu einen Vektorraum V über dem Körper $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $f : V \to \mathbb{R}$ heißt *Linearform*, falls die Identitäten

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \qquad \forall x, y \in V \qquad \text{und}$$
$$f(\alpha x) = \alpha f(x), \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in V$$

[1]Das setzt natürlich voraus, dass dieser Grenzwert auch existiert, was wir im folgenden immer annehmen werden. Im Rahmen der Thermodynamik sind die betrachteten Funktionen, bis auf wenige interessante Ausnahmen, immer differenzierbar.

gelten. Die Menge aller Linearformen über einem n-dimensionalen Vektorraum V bildet dessen ebenfalls n-dimensionalen Dualraum V^*. Ist $\{x_i\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ eine Basis von V, so ist $\{\mathrm{d}x^i\}$, mit

$$\mathrm{d}x^i(x_j) = \delta^i_j$$

eine Basis von V^*. Beachte, dass die $\mathrm{d}x^i$ selbst Abbildungen von V nach $\mathbb{R}$ sind.

(b) Zeige, durch geeignete Definition von Addition und skalarer Multiplikation, dass V^* selbst ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, sowie dass $\{\mathrm{d}x^i\}$ eine Basis dieses Vektorraums ist.

Betrachte nun eine offene Teilmenge M des $\mathbb{R}^n$ und eine differenzierbare Funktion $f : M \to \mathbb{R}$. Die *totale Ableitung* von f ist dann eine Abbildung

$$\mathrm{d}f(p) : \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & D_v f(p) \end{array},$$

die einem Vektor v, die Richtungsableitung $D_v f(p)$ der Funktion f am Punkt p in Richtung von v zuordnet. Wegen der linearität der Richtungsableitung ist $\mathrm{d}f(p)$ eine Linearform und es gilt

$$\mathrm{d}f(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^k}(p)\, \mathrm{d}x^k\,.$$

Per Definition ist jede totale Ableitung eine Linearform. Allerdings ist nicht jede Linearform A die totale Ableitung einer Funktion. Erfüllt die Linearform A allerdings die *Integrabilitätsbedingung* $\mathrm{d}A = 0$ (man nennt A dann *geschlossen*), so kann man zumindest in einer Umgebung eines jeden Punktes p eine Funktion f finden, sodass $A = \mathrm{d}f$. Ist der Definitionsbereich einer Linearform der $\mathbb{R}^n$, oder allgemeiner ein sternförmiges Gebiet, so gibt es diese *Stammfunktion* f sogar global[2].
In der Thermodynamik passiert es oft, dass ein System durch eine bestimmte Anzahl von Zustandsgrössen vollständig bestimmt ist, man aber eine größere Anzahl von Zustandsgrössen zur Verfügung hat. Natürlich sind diese Zustandsgrössen dann nicht unabhängig voneinander und können als Funktionen voneinander verstanden werden. Betrachte dazu das einfache Beispiel einer Funktion $f : S^2 \to \mathbb{R}$, wobei S^2 die zweidimensionale Einheitssphäre bezeichnet. Wir parametrisieren die S^2 über die kanonische Einbettung in den $\mathbb{R}^3$, das heißt mit den euklidischen Koordinaten (x, y, z) die über die Relation $1 = x^2 + y^2 + z^2$ voneinander abhängen.

(c) Es sei $f(x, y) = x^2 + y^2$. Gib $\mathrm{d}f(x, y)$ an. Drücke $\mathrm{d}f(x, z(x, y))$ durch $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ aus.

Es ist in solchen Fällen üblich, die konstant gehaltenen Grössen bei partiellen Ableitungen explizit anzugeben. Zum Beispiel schreibt man

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y\,.$$

(d) Berechne $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$ sowie $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_z$ für die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$.

[2] Auf Manigfaltigkeiten ist die Existenz einer globalen Stammfunktion einer geschlossen Differentialform abhängig von der de-Rham Kohomologiegruppe der Mannigfaltigkeit.

(e) Zeige die Relation

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z .$$

(f) Betrachte abschließend drei, von einander abhängige Größen $u(v, w)$, $v(u, w)$, $w(u, v)$, das heißt wir können uns diese Größen als Koordinaten auf einem zweidimensionalen Raum vorstellen. Zeige zuerst, dass

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_w = \frac{1}{\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)_w} .$$

Benutze diese Identität um die Kettenregel

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_w \left(\frac{\partial v}{\partial w}\right)_u \left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)_v = -1 ,$$

zu zeigen, indem Du eine *Kurve* im (v, w)-Raum betrachtest entlang derer u konstant ist, also $\mathrm{d}u = 0$.

–Hausübungen–

H 3.1 Temperatur des Spin-Ensembles *(2+1+2=5) Punkte*

Betrachte dass Spin-Ensemble aus Aufgabe H 2.2.

(a) Aus Aufgabe H 2.2b) sieht man, dass $\omega(E, \delta E)$ näherungsweise durch

$$\log \omega(E, \delta E) = -\frac{1}{2}\left(N - \frac{E}{\mu B}\right) \log\left(\frac{1}{2} - \frac{E}{2N\mu B}\right) - \frac{1}{2}\left(N + \frac{E}{\mu B}\right) \log\left(\frac{1}{2} + \frac{E}{2N\mu B}\right)$$

gegeben ist, wobei hier der irrelevante Term $\log(\delta E/2\mu B)$ vernachlässigt wurde. Gib die Energie E des Systems in Abhängigkeit seiner Temperatur T an.

(b) Wann ist T negativ?

(c) Gib die Magnetisierung $M = \mu(n_1 - n_2)$ in Abhängigkeit von der Temperatur an.

H 3.2 Zwei Spin-Ensembles *(4+4+2=10) Punkte*

Betrachte zwei Kopien des Spin-Ensembles aus Aufgabe H 2.2 im Magnetfeld B. Wir bezeichnen Teilchenzahl und magnetisches Moment des ersten Ensembles mit N und μ, die des zweiten Ensembles mit N' und μ'. Die Energien der beiden Ensembles sind dann durch $bN\mu B$ beziehungsweise $b'N'\mu'B$ gegeben, wobei $b = 1 - \frac{2n_1}{N}$ und $b' = 1 - \frac{2n_1'}{N'}$. Es seien $|b|, |b'| \ll 1$, sodass der in Aufgabe H 2.2d) hergeleitete Ausdruck für die Zustandsdichten ω Gültigkeit besitzt.

(a) Zeige, dass im thermischen Gleichgewicht, das heißt in der wahrscheinlichsten Konfiguration des Gesamtsystems, die Energien $\tilde{E}$ und $\tilde{E}'$ der beiden Systeme über

$$\frac{\tilde{E}}{\mu^2 N} = \frac{\tilde{E}'}{\mu'^2 N'}$$

zusammenhängen und berechne $\tilde{E}$.
Tipp: Vernachlässige Terme die $\delta E^{(\prime)}$ enthalten.

(b) Die Wahrscheinlichkeit $P(E)\mathrm{d}E$ dafür, dass das erste Ensemble eine Gleichgewichtsenergie zwischen E und $E + \mathrm{d}E$ besitzt ist proportional zur Zahl der Zustände des Gesamtsystems in denen das erste Ensemble diese Energie hat. Zeige, dass

$$P(E)\mathrm{d}E = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(E-\tilde{E})^2}{\sigma^2}} \mathrm{d}E\,,$$

mit $\sigma^2 = \frac{\mu^2\mu'^2 B^2 N N'}{\mu^2 N + \mu'^2 N'}$ gilt.
Tipp: Was ist $\int_{-\infty}^{\infty} P(E)\mathrm{d}E$?

(c) Wie groß ist das Schwankungsquadrat $(\Delta E)^2$?

H 3.3 Ideales Gas *(2+3=5) Punkte*

Die Entropie des idealen Gases ist im Grenzfall großer, fester Teilchenzahl durch

$$S(E,V) = kN \log\left[\frac{V}{N}\left(\frac{4\pi m E}{3Nh^2}\right)^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{\frac{5}{2}}\right]$$

gegeben.

(a) Berechne die Energie E in abhängigkeit von der Temperatur.

(b) Der Druck sei durch

$$P = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_E$$

definiert. Berechne P und gib die thermische Zustandsgleichung des idealen Gases, das heißt dessen Druck in abhängigkeit von V und T an.