Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Übungsblatt 8
30. November 2012
WS 12/13

Übungen zu Theoretische Physik IV

Priv.-Doz. Dr. Stefan Förste

http://www.th.physik.uni-bonn.de/people/forste/exercises/ws1213/tp4

–Anwesenheitsübungen–

A 8.1 Thermodynamische Ungleichungen

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass man aus der Tatsache, dass die Schwankungsquadrate der statistischen Größen E und V positiv sind, die Ungleichungen

$$C_V \geq 0 \qquad \text{und} \qquad \kappa_T \geq 0$$

folgern kann. Hier wollen wir diese beiden *Stabilitätsbedingungen* noch einmal aus der makroskopischen Thermodynamik folgern. Betrachte dazu ein System mit Energie E, Volumen V und Teilchenzahl N. Dieses System zerlegen wir nun in zwei gleich große Teilsysteme und betrachten eine Änderung der Energie E_1 des ersten Teilsystems, seines Voumens V_1 und seiner Teilchenzahl N_1 um δE_1, δV_1 und δN_1. Entsprechend ändern sich die Energie E_2, das Volumen V_2 und die Teilchenzahl N_2 des zweiten Teilsystems um $\delta E_2 = -\delta E_1$, $\delta V_2 = -\delta V_1$ und $\delta N_2 = -\delta N_1$. Die gesamte Entropie ist vorher

$$S(E,V,N) = S_1\left(\frac{E}{2}, \frac{V}{2}, \frac{N}{2}\right) + S_2\left(\frac{E}{2}, \frac{V}{2}, \frac{N}{2}\right) .$$

(a) Entwickle die Änderung der Entropie δS bis zur zweiten Ordnung in δE_1, δV_1, δN_1. Was folgt aus der Stationarität der Entropie für Temperaturen, Drücke und chemische Potentiale der Teilsysteme?

(b) Es sei $\delta N = 0$. Folgere die Stabilitätsbedingungen aus der Maximalität der Entropie.

Stabilitätsbedingungen dieser Art sind Ausdruck des *Prinzips von Le Chatelier*: Wenn ein System in einem stabilen Gleichgewichtszustands ist führt jede spontane Änderung seiner Parameter zu Reaktionen, die das System wieder ins Gleichgewicht führen.

A 8.2 Heizen eines Raumes

Wir wollen hier die Wärmemenge berechnen die benötigt wird um einen Raum von 0°C auf 20°C zu erhöhen. Diesen Prozess wollen wir zuerst isobar annehmen, das heißt dass Luft aus dem Raum über die Fensterschlitze entweichen kann, wobei auch die Anzahl der Luftmoleküle innerhalb des Raumes im Laufe der Erwärmumg abnimmt. Danach berechnen wir die benötigte Wärmeenergie im Falle eines vollständig abgedichteten Raumes, das heißt, bei konstanter Teilchenzahl des Gases. Wir nehmen die Luft innerhalb des Raumes als ideales Gasgemisch von Sauerstoff und Stickstoff an, sodass $f = 5$.

(a) Berechne die Wärmeenergie, die notwendig ist um den Raum zu heizen, wenn der Druck konstant gehalten wird.

(b) Berechne die Wärmeenergie, die notwendig ist um den Raum zu heizen, wenn der Raum vollständig abgedichtet ist.

–Hausübungen–

H 8.1 Richmannsche Mischungsregel *5 Punkte*

In einem isolierten Behälter befinden sich zwei Stoffe die durch eine feste, teilchenundurchlässige aber energiedurchlässige Wand getrennt sind. Die beiden Stoffe haben die Anfangstemperaturen T_{A} und T_{B} und temperaturunabhängige Wärmekapazitäten $C_{V,\mathrm{A}}$ und $C_{V,\mathrm{B}}$. Berechne die Gleichgewichtstemperatur T_{f} des Systems sowie seine Entropieänderung. Ist dieser Prozess reversibel?

H 8.2 Isotherme beim Van-der-Waals Gas *5 Punkte*

Die Zustandsgleichung des Van-der-Waals Gases, die wir in Aufgabe H 4.1 bestimmt haben, lautet

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = kT\,,$$

wobei $v = \frac{V}{N}$ das Volumen pro Teilchen ist. Im Gegensatz zum idealen Gas sind beim Van-der-Waals Gas die Isothermen in der p-V-Ebene nicht für alle Werte von T monotone Funktionen. Unterhalb einer kritischen Temperatur T_{c} haben sie zwei Extrema und es bilden sich sogenannte *Van-der-Waals-Schleifen* aus, wie man in Abbildung 1 erkennen kann. Insbesondere gibt es dann Bereiche in denen $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T > 0$ und damit die Stabilitätsbedingung $\kappa_T \geq 0$ verletzt ist. Berechne die kritische Temperatur T_{c}, für die die Isotherme nur einen Sattelpunkt besitzt und zeige, dass sie oberhalb dieser Temperatur kein und unterhalb dieser Temperatur zwei Extrema hat.

Tipp: Benutze ein Diskriminantenkriterium und die Cardanischen Formeln.

H 8.3 Schallwellen in einem Gas *(3+2+2+3=10) Punkte*

Wir wollen hier die Ausbreitung von Schallwellen in einem Gas betrachten. Wenn eine Schallwelle durch ein Gas läuft, ist die Schwingungsdauer klein im Vergleich zur Relaxationszeit, die ein makroskopisch kleines Volumenelement des Gases benötigt, um mit dem Rest des Gases durch Wärmeleitung Energie auszutauschen. Somit können Dichteänderungen eines solchen Volumenelementes als adiabatisch verlaufend angesehen werden. Hier sollen eindimensionale Verdichtungen und Verdünnungen betrachtet werden. Der Gleichgewichtsdruck des Gases sei P_0.

(a) Betrachte eine kleine Scheibe wie in Abbildung 2, die im Gleichgewicht die Breite $\Delta x \ll 1$ hat. Durch die Druckwelle wird die linke Seite der Scheibe um ξ und die

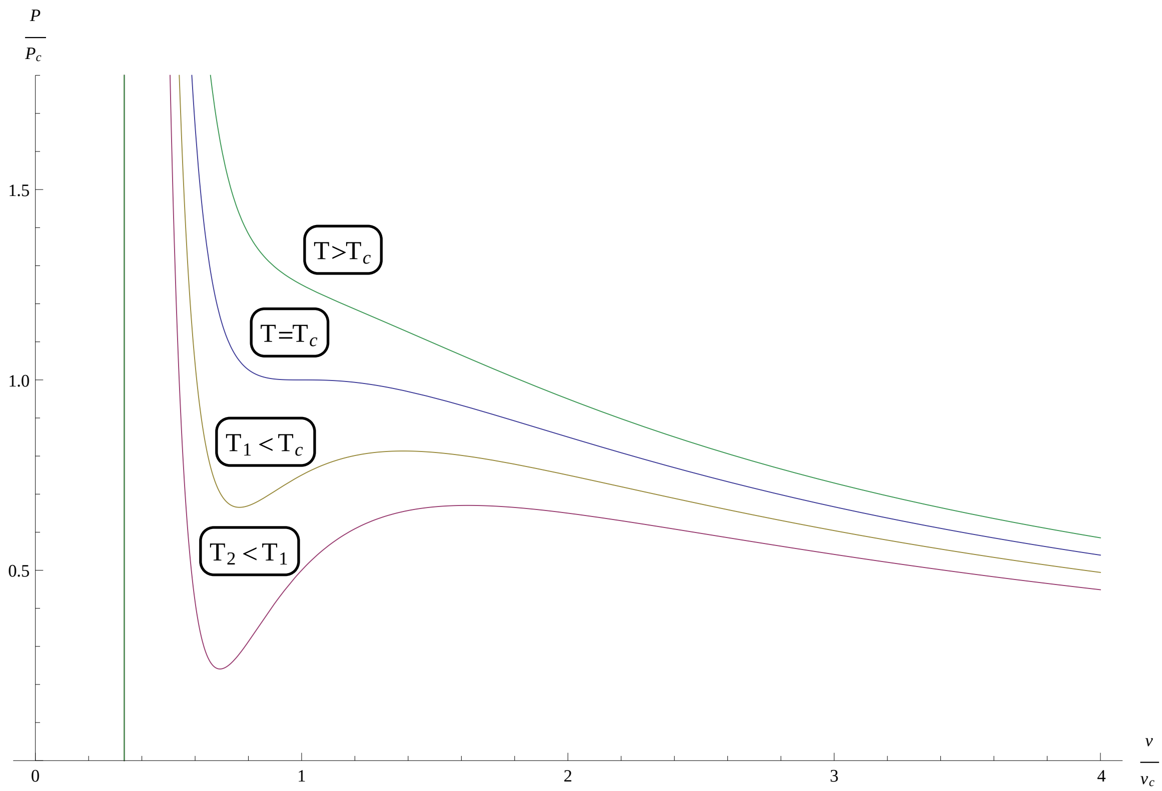

Abbildung 1: Isotherme des Van-der-Waals Gases in der p-V-Ebene für verschiedene Werte von T.

rechte Seite der Scheibe um $\xi + \Delta\xi$ ausgelenkt. Zeige die Gleichung

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\,,$$

wobei p die Abweichung des Drucks vom Gleichgewichtsdruck und ρ die Dichte des Gases beschreibt, indem du die Kräfte bestimmst die auf solch ein kleines Volumenelement wirken. Dabei kann die Ausdehnung des Volumenelementes vernachlässigt werden. *Tipp: Die Änderung des Druckes mit dem Ort kann linear genähert werden.*

(b) Zeige, dass im Grenzwert $\Delta x \to 0$,

$$p = -\frac{1}{\kappa_S}\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

gilt wobei die Variation von p mit x vernachlässigt werden kann. Benutze das Ergebnis um zu zeigen dass

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{\kappa_S \rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

erfüllt ist, die Druckabweichung also einer Wellengleichung mit der Schallgeschwindigkeit $u = (\rho\kappa_S)^{-1/2}$ genügt.

(c) Drücke die adiabatische Kompressibilität κ_S eines idealen Gases durch seinen Druck und das Verhältnis $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ aus.

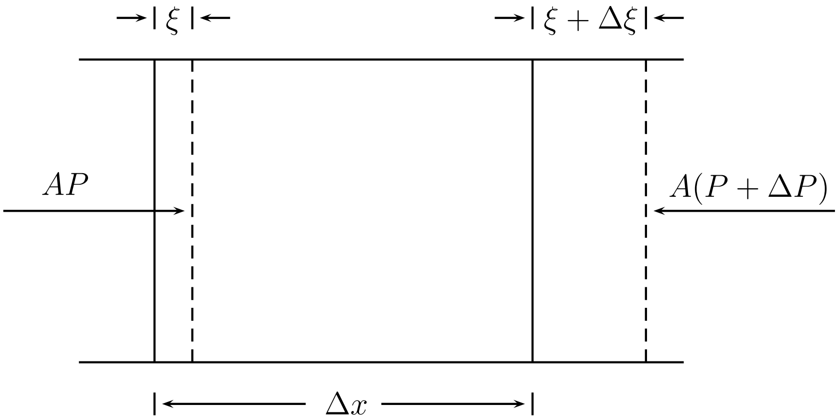

Abbildung 2: Zur Druckwelle im Gas.

(d) Drücke die Schallgeschwindigkeit im idealen Gas durch γ, die molare Masse μ und die Temperatur T aus. Wie hängt die Schallgeschwindigkeit bei festem Druck von der Temperatur ab? Wie hängt sie bei fester Temperatur vom Gleichgewichtsdruck P_0 ab? *Tipp: Benutze die Zustandsgleichung des idealen Gases.*