Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Übungsblatt 13
18. Januar 2013
WS 12/13

Übungen zu Theoretische Physik IV

Priv.-Doz. Dr. Stefan Förste

http://www.th.physik.uni-bonn.de/people/forste/exercises/ws1213/tp4

–Anwesenheitsübungen–

A 13.1 Pauli-Paramagnetismus

In der Vorlesung haben wir den Hamiltonoperator für N Elektronen im Magnetfeld $H = \text{rot } A$

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{1}{2m} \left(p_i - \frac{e}{c} A(x_i) \right)^2 - \mu_i^{\text{Spin}} \cdot H(x_i) \right\} + W_{\text{coul.}}$$

besprochen. Dabei ist A das Vektorpotential und $\mu_i^{\text{Spin}} = -\frac{g_e \mu_B}{\hbar} S_i$ das magnetische Moment des i-ten Elektrons, wobei der *Landé-g-Faktor* des Elektrons durch

$$g_e \approx 2.0023$$

und das *Bohrsche Magneton* durch

$$\mu_B = -\frac{e\hbar}{2mc}$$

gegeben ist. Setzt man $g_e = 2$ und betrachtet ein ortsunabhängiges Magnetfeld H, dass in z-Richtung ausgerichtet ist, so kann man den Hamiltonoperator als

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{p_i^2}{2m} - \frac{e}{2mc}(L_i + 2S_i)_z H_z + \frac{e^2 H_z^2}{8mc^2} \left(x_i^2 + y_i^2 \right) \right\} + W_{\text{Coul.}}$$

schreiben. Der Term $\sum_i \frac{e^2 H_z^2}{8mc^2} \left(x_i^2 + y_i^2 \right)$ liefert dabei einen diamagnetischen Beitrag, da die zugehörige Suszeptibilität

$$\langle \mu_z \rangle = -\sum_{i=1}^{N} \frac{e^2 H_z}{4mc^2} \left\langle \left(x_i^2 + y_i^2 \right) \right\rangle$$

dem Magnetfeld entgegengesetzt orientiert ist.
Hier wollen wir uns auf den paramagnetischen Teil des Hamiltonoperators beschränken, der durch die Kopplung des Magnetfeldes an die Elektronenspins gegeben ist. Betrachte dazu ein freies, dreidimensionales Elektronengas im Magnetfeld H bei kleiner Temperatur $T \to 0$. Dann sind die Energieeigenwerte durch

$$\epsilon_{\pm} = \frac{p^2}{2m} \pm \frac{1}{2} g_e \mu_B H_z$$

gegeben, wobei $+(-)$ die Elektronen bezeichnet deren Spin (anti-)parallel zum Feld ausgerichtet sind.

(a) Wie groß ist die Zahl der Elektronen $N_\pm$ in den beiden Zuständen?

(b) Betrachte den Fall $g_\mathrm{e}\mu_\mathrm{B}H \ll \mu \approx \epsilon_\mathrm{F}$ und entwickle $N_\pm$ nach H_z.

(c) Berechne die Magnetisierung und die magnetische Suszeptibilität für den Fall $T \to 0$.

–Hausübungen–

H 13.1 Magnetische Response Funktionen *(5+5+5=15) Punkte*

Betrachte ein magnetisches System, das durch Entropie S, Temperatur T, Magnetisierung M und ein äußeres Magnetfeld H bestimmt ist. Seine thermodynamsichen Eigenschafen werden durch die Responsefunktionen beschrieben:
Die spezifische Wärme bei konstanter Magnetisierung, bzw. konstantem Magnetfeld

$$C_M = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_M \qquad \text{bzw.} \quad C_H = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_H ,$$

die isotherme und die adiabatische Suszeptibilität,

$$\chi_T = \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T \qquad \text{und} \quad \chi_S = \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_S ,$$

sowie den Temperaturkoeffizienten der Magnetisierung $\alpha_H = \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H$.

(a) Zeige

$$\frac{C_H}{C_M} = \frac{\chi_T}{\chi_S} .$$

Tipp: Nutze $\mathrm{d}H = \mathrm{d}M = 0$.

(b) Zeige nun

$$\begin{aligned} C_H - C_M &= TV\alpha_H^2/\chi_T \qquad \text{und} \\ \chi_T - \chi_S &= TV\alpha_H^2/C_H . \end{aligned}$$

Tipp: Gehe analog zum Fall $C_p - C_V = TV\alpha^2/\kappa_T$ *vor.*

(c) Betrachte einen Hamitlonoperator von der Form

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - \mu \cdot H ,$$

wo also H nur linear eingeht und μ mit $\mathcal{H}$ kommutiert, das heißt wir vernachlässigen diamagnetische Effekte. Zeige für einen solchen Hamiltonoperator

$$C_M \geq 0 ,$$

indem du

$$A(T, M) = -kT \log \mathrm{Sp}\, \mathrm{e}^{-\beta\mathcal{H}} + HM$$

bei festem M zweimal nach T ableitest.

H 13.2 Hamiltonoperator und magnetisches Moment *5 Punkte*

Zeige, ausgehend von der Definition

$$\mu = \frac{1}{2c} \int \mathrm{d}^3x \; x \times j(x) = -\frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3x \; x \times \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta A(x)} \,,$$

dass für ein ortsunabhängiges (homogenes) Feld, H,

$$\mu = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H}$$

gilt.