UNIVERSITÄT BONN
Physikalisches Institut

Pfaddarstellungen Minimaler Modelle

von

Michael Rösgen

Abstract

An introduction to path spaces and AF-algebras over graphs is given. Statistical models over graphs are considered and the spectrum of the corner transfer matrix hamiltonian is given at zero temperature as well as at the critical point. Results are compared to the superselection structure of the corresponding conformal field theories. Path representations of certain sectors of conformal minimal models are obtained from factorizing Virasoro characters. Operator K-theory is applied to the path algebra to derive the fusion of the maximally extended chiral algebra. By generalized Rogers-Ramanujan-Identities the factorizing characters are related to sum forms allowing for a quasiparticle interpretation. The latter can be used for the construction of lattice Virasoro algebras. First results in this direction are given.

Post address:
Nußallee 12
D-53115 Bonn
Germany

BONN-IR-93-24
Bonn University
March 1993
net version: 9/98

Inhalt

1 Einleitung 2

2 Zweidimensionale konforme Quantenfeldtheorie 4

3 Pfade über Graphen 7

3.1 Graphen 7

3.2 AF-Algebren, Bratteli-Diagramme und K-Theorie 7

3.3 Pfadräume und Pfadalgebren 9

3.4 Die Temperley-Lieb-Jones-Algebra 11

4 Pfadräume in Statistischen Modellen 12

4.1 Die Corner-Transfermatrix von IRF-Modellen 12

4.2 Temperley-Lieb-Klasse, statistische Modelle auf Pfaden 13

4.3 Corner-Transfermatrix bei Temperatur Null 15

4.4 Corner-Transfermatrix bei kritischer Temperatur 16

4.5 Superauswahlsektor-Struktur 19

5 Pfadräume in Minimalen Modellen der CFT 20

5.1 Realisierung des Energieoperators auf Pfadräumen 20

5.2 Quasiteilchen-Struktur der Pfadräume 21

5.3 $\mathcal{W}$-Fusionsalgebren Minimaler Modelle 23

5.4 Vergleich von Pfaddarstellungen in statistischen Modellen und CFT 25

5.5 Verallgemeinerungen 26

6 Zur Virasoro-Algebra auf dem Gitter 28

6.1 Das Ising-Modell 28

6.2 Die kleine konforme Algebra des $(2,5)$-Modells 30

6.3 $su(1,1)$ auf Tensorprodukten von Quasiteilchen-Pfadräumen 32

6.4 Virasoro-Algebra und Temperley-Lieb-Jones-Algebra 35

7 Zusammenfassung und Ausblick 37

Danksagungen 37

Literatur 38

1. Einleitung

Zweidimensionale konforme Quantenfeldtheorien (CFT) [1][2][3][4][5][6][7] beschreiben kontinuierliche Phasenübergänge vieler exakt lösbarer zweidimensionaler statistischer Modelle. So stehen die in der grundlegenden Arbeit von BPZ [2] 1984 analysierten Minimalen Modelle in enger Beziehung zu den in [8][9] definierten ABF- und BF-Modellen, die mit Hilfe von Pfadräumen über Coxeter-Graphen einfacher Lie-Algebren definiert werden können [10][11]. 1987 konnte gezeigt werden [12][13], daß die Charaktere der Sektoren der unitären Minimalen Modelle mit den Einpunktfunktionen der ABF-Modelle bei Temperatur Null übereinstimmen. Zuvor hatte Huse [14] bereits die Übereinstimmung von Höchstgewichten und kritischen Exponenten der entsprechenden Modelle festgestellt.

CFT sind per definitionem unter der konformen Gruppe kovariant. Da letztere in zwei Dimensionen unendlichdimensional ist, lassen sich dort mit Hilfe dieser Symmetrie im Prinzip alle Mehrpunktfunktionen bestimmen. Ein besseres direktes Verständnis des Zusammenhangs von CFT mit den entsprechenden statistischen Modellen verspricht daher einen deutlichen Fortschritt in der Lösung dieser Modelle. Außerdem können CFT auch nichttriviale Beispiele für die Axiomatische Quantenfeldtheorie [15][16] liefern. Engere Zusammenhänge bestehen zwischen CFT und aktuellen Ergebnissen in der Mathematik: Sowohl das Auftreten von Dilogarithmen-Identitäten [17][18] als auch die axiomatische Beschreibung von CFT [7] sind eng mit der Theorie der 3-Mannigfaltigkeiten M^3 (Thurston) und Knoten [19] verknüpft. Insbesondere deuten neuere Entwicklungen darauf hin, daß das Problem der Klassifikation von (M^3) dem der Klassifikation von CFT über Dilogarithmen-Identitäten verwandt ist [18]. Umgekehrt sollte eine Klassifikation und Konstruktion von CFT aus der zugrundeliegenden Observablenalgebra oder einer guten Approximation derselben durch eine AF-Algebra möglich sein. Zu erwarten ist also ein enger Zusammenhang folgender Klassen (oder geeigneter Unterklassen): (M^3), Werte des Dilogarithmus auf geeigneten Mengen algebraischer Zahlen, CFT und Isomorphieklassen von AF-Algebren. Letztere werden durch Äquivalenzklassen von Bratteli-Diagrammen charakterisiert. Auf Repräsentanten derselben lassen sich wiederum explizit statistische Modelle der Temperley-Lieb-Klasse definieren, und es gibt erste Anzeichen für die Möglichkeit einer Konstruktion von CFT auf den Pfadräumen dieser Diagramme.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist die genauere Analyse der Pfadraumstruktur von Minimalen Modellen und den entsprechenden statistischen Modellen, die auch geeignet ist, Zusammenhänge zwischen beiden Seiten herzustellen. Vermöge der Transfer- oder Corner-Transfermatrix (CTM) wird dabei dem exakt lösbaren zweidimensionalen statistischen Modell ein eindimensionales Quantensystem (Quantenkette) zugeordnet [20], dessen Hilbertraum sich als Pfadraum beschreiben läßt.

Nach der Bereitstellung der erforderlichen Begriffe aus der zweidimensionalen konformen Quantenfeldtheorie im zweiten Kapitel werden im dritten Eigenschaften von Pfadräumen und darauf definierten Pfadalgebren erarbeitet bzw. zusammengestellt. Die folgenden beiden Kapitel sind dann verschiedenen Realisierungen des Energieoperators gewidmet: Während im vierten Kapitel Realisierungen des CTM-Hamitonians im statistischen Modell (ABF) bei Temperatur Null (aufgrund der üblichen Pfaddefinition) und kritischer Temperatur angegeben und Spektrum wie Superauswahlstruktur untersucht werden, wendet sich das fünfte Kapitel dem Problem von der CFT her zu. Mit Hilfe der in diesem Zugang neu entwickelten Standardfaktorisierung von Charakteren gewinnt man Pfaddarstellungen, die das Problem der Diagonalisierung des CTM-Hamiltonians bei kritischer Temperatur auf die Konstruktion eines Isomorphismus zwischen den in den beiden Zugängen entwickelten Darstellungen verschiebt. Dessen Kenntnis wiederum ist der des annihilierenden Ideals der Virasoro-Algebra für das entsprechende Modell äquivalent, das auf Seiten des statistischen Modells durch die Trunkierung des Pfadraumes, also durch Quotientenbildung nach geeigneten Idealen der Temperley-Lieb-Algebra gegeben wird. Als neue Ergebnisse lassen diese Pfadräume eine Bestimmung des Fusionsrings des Modells (oder der zugehörigen maximalen $\mathcal{W}$-Algebra) mit rein algebraischen Methoden ebenso zu wie eine Quasiteilchen-Interpretation der Summationsindizes in der Rogers-Ramanujan-Identität der entsprechenden Charaktere. Postuliert man diese Quasiteilchen als $su(1,1)$-Invarianten, so scheint damit eine Gitter-Virasoro-Algebra auf den entsprechenden Pfaden eindeutig bestimmt zu sein. Erste im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Ergebnisse zur Realisierung einer solchen werden im sechsten Kapitel angegeben, insbesondere Pfadrealisierungen der kleinen konformen Algebra $su(1,1)$. Neben einer Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse zeigt das siebte Kapitel noch offene Fragen auf und gibt Hinweise auf mögliche Verallgemeinerungen. Einige der im fünften Kapitel dargestellten Ergebnisse wurden bereits in der Arbeit [21] veröffentlicht, die der interessierte Leser insbesondere für nähere Informationen über eine Anwendung auf Dilogarithmus-Identitäten heranziehen mag.

2. Zweidimensionale konforme Quantenfeldtheorie

Dieses Kapitel beinhaltet eine kurze Zusammenfassung einiger in den späteren Kapiteln benötigter Ergebnisse aus zweidimensionalen konformen Quantenfeldtheorien [2][4][5].

Zweidimensionale konforme Quantenfeldtheorien (CFT) sind kovariant unter konformen Transformationen der Raumzeit. Deren Lie-Algebra ist die direkte Summe zweier Witt-Algebren $Witt = \langle L_n \rangle_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $[L_n, L_m] = (m-n)L_{n+m}$. Da für die Quantentheorie nur deren projektive Darstellungen relevant sind, werden stattdessen gewöhnliche Darstellungen ihrer eindeutigen zentralen Erweiterung, der Virasoro-Algebra $Vir = Witt \oplus \langle c \rangle$ mit

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= (m-n)L_{n+m} + \frac{c}{12}(m-1)m(m+1)\delta_{m+n,0}, \\ [L_n, c] &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

untersucht. c heißt zentrale Ladung. Eine Unteralgebra hiervon ist die kleine konforme Algebra $< L_{-1}, L_0, L_{+1} > \cong su(1,1)$, die die globalen konformen Transformationen erzeugt. Die Algebra der Fourierkomponenten des Energie-Impuls-Tensors einer CFT ist die Summe zweier Virasoro-Algebren. Die (chiralen) Superauswahl-Sektoren von CFT sind Höchstgewichts-Darstellungen (HGD) der Virasoro-Algebra. Sie werden durch die zentrale Ladung c und das Höchstgewicht h charakterisiert:

Definition (2.2) Seien $h, c \in \mathbb{C}$. Eine HGD $M_{h,c}$ von Vir ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit einem Höchstgewichts-Vektor v, der die Eigenschaften $M_{h,c} = \mathcal{U}(Vir)v$, $L_n v = 0\ \forall n < 0$ und $L_0 v = hv$ hat, wobei $\mathcal{U}(Vir)$ die universelle Einhüllende von Vir ist. Eine HGD $V_{h,c}$ heißt Verma-Modul, wenn es von $V_{h,c}$ auf jede HGD $M_{h,c}$ einen Epimorphismus gibt.

Der Verma-Modul ist nach L_0-Eigenwerten graduiert, $w \in V_{h,c}^N :\Leftrightarrow L_0 w = (h+N)w$, und liefert als Charakter die η-Funktion. In dem durch einen antilinearen Automorphismus $(\cdot)^*$: $L_n \mapsto L_n^* = L_{-n}$ und $< v^*, v >= 1$ (v ist der Höchstgewichts-Vektor) eindeutig bestimmten inneren Produkt sind die Summanden unterschiedlicher Grade des Verma-Moduls orthogonal. Die Determinante des auf $V_{h,c}^N$ restringierten inneren Produkts ist die Kac-Determinante [22]

$$\det(< \cdot, \cdot >|_{V_{h,c}^N}) = \text{const}(n) \prod_{1 \le nm \le N} (h - h_{n,m}(c))^{p(N-nm)}\,, \tag{2.3}$$

wobei $h_{n,m}(c) := \frac{1}{48}\left((13-c)(n^2+m^2) + \sqrt{c^2-26c+25}(n^2-m^2) - 24nm + 2c - 2\right)$ ist, n, m ganze Zahlen sind und $p(r)$ die Zahl der Partitionen von r bezeichnet. Daraus entnimmt man, daß in $V_{h,c}$ genau dann ein singulärer Vektor w mit $L_0 w = (h+nm)w$ und $L_n w = 0\ \forall n < 0$ existiert, wenn h einen der Werte $h_{n,m}(c)$ annimmt. In diesem Falle läßt sich $V_{h+nm,c}$ in $V_{h,c}$ einbetten.

Ist insbesondere die zentrale Ladung

$$c = c(p,p') := 1 - 6\frac{(p-p')^2}{pp'} \tag{2.4}$$

mit teilerfremden ganzen Zahlen p, p' und das Höchstgewicht

$$h = h_{n,m}^{(p,p')} := \frac{(pm - p'n)^2 - (p-p')^2}{4pp'} \tag{2.5}$$

mit $1 \leq n \leq p-1$ und $1 \leq m \leq p'-1$, so haben alle diese ineinander eingebetteten Verma-Moduln unendlich viele singuläre Vektoren. Bei diesem Fall handelt es sich um die Minimalen Modelle (p,p') der Virasoro-Algebra, für die zudem die Fusionsalgebra endlich und abgeschlossen ist [2].

Mit den Abkürzungen $a(k) = h^{(p,p')}_{n+2pk,m}$ und $b(k) = h^{(p,p')}_{n+2pk,-m}$ ergibt sich die Einbettungsstruktur im Verma-Modul des (p,p')-Virasoro Minimalen Modells [22]

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a(0) & \longleftarrow & b(0) & \longleftarrow & a(1) & \longleftarrow & b(1) & \longleftarrow & a(2) & \cdots & \\
 & \nwarrow & & \nwarrow\!\!\!\!\swarrow & & \nwarrow\!\!\!\!\swarrow & & \nwarrow\!\!\!\!\swarrow & & & \\
 & & b(-1) & \longleftarrow & a(-1) & \longleftarrow & b(-2) & \longleftarrow & a(-2) & \cdots, &
\end{array} \tag{2.6}$$

worin die HDG durch ihre Höchstgewichte $a(k), b(k)$ repräsentiert sind. Nach [23] ergibt sich hieraus für die Modularen Charaktere $\chi_{n,m}(q) = q^{-c/24}\ \mathrm{Tr}\ q^{L_0}$ (Spur über irreduzible HGD zum Höchstgewicht $h_{n,m}$)

$$\chi^{(p,p')}_{n,m}(q) = \frac{q^{-c/24}}{\prod_{l\geq 1}(1-q^l)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(q^{a(k)} - q^{b(k)}\right) = \frac{q^{-c/24+h^{(p,p')}_{n,m}}}{\prod_{l\geq 1}(1-q^l)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} q^{pp'k^2} \left(q^{k(pm-p'n)} - q^{k(pm+p'n)+nm}\right). \tag{2.7}$$

Für den (nicht modular kovarianten) mathematischen Charakter wird im folgenden die Notation

$$\mathrm{ch}^{(p,p')}_{n,m}(q) = q^{\frac{c(p,p')}{24} - h^{(p,p')}_{n,m}} \chi^{(p,p')}_{n,m}(q) \tag{2.8}$$

verwendet.

Die relative Größe der in den folgenden Kapiteln behandelten Pfadraumdarstellungen für die einzelnen (chiralen) Superauswahlsektoren (HGD) läßt sich in der CFT aus dem Verhalten der entsprechenden Charaktere unter modularen Transformationen ablesen, das daher im folgenden skizziert wird.

Eine CFT auf dem Torus erhält man durch Identifikation gegenüberliegender Seiten des Parallelogramms in $\mathbb{C}$ mit den Ecken $0,\ 1,\ \tau,\ 1+\tau$. Die damit auf dem Torus ausgezeichnete komplexe Struktur transformiert sich (per definitionem) kovariant unter der Modulgruppe, die von

$$T:\ \tau \longmapsto \tau + 1 \qquad S:\ \tau \longmapsto -1/\tau \tag{2.9}$$

erzeugt wird. An die Zustandssumme der CFT wird die Forderung Modularer Invarianz gestellt. Die Charaktere der CFT transformieren sich dementsprechend als Modulfunktionen mit

$$\begin{aligned} T:\ \chi_h(q) &\longmapsto e^{2\pi i(c/24-h)}\chi_h(q) \\ S:\ \chi_h(q) &\longmapsto \sum_{h'} S_{h,h'}\chi_{h'}(q), \end{aligned} \tag{2.10}$$

wobei die S-Matrix für das Minimale Modell (p,p') die Form

$$\begin{aligned} S:\ \chi^{(p,p')}_{n,m} &\longmapsto \sum_{\substack{1\leq n'\leq p'-1 \\ 1\leq m'\leq p-1}} S_{h_{n,m},h_{n',m'}} \chi^{(p,p')}_{n',m'} \\ S_{h_{n,m},h_{n',m'}} &= \sqrt{\frac{2}{pp'}}(-1)^{m'n+mn'+1} \sin\frac{\pi nn'p'}{p} \sin\frac{\pi mm'p}{p'} \end{aligned} \tag{2.11}$$

hat [24]. Speziell für unitäre Modelle ($p = p' \pm 1$) gilt

$$S_{h_{n,m},h_{n',m'}} = \sqrt{\frac{2}{pp'}}(-1)^{(m+n)(m'+n')} \sin\frac{\pi n n'}{p} \sin\frac{\pi m m'}{p'}. \tag{2.12}$$

Für Theorien mit $c < 1$ ergibt sich für die modular invarianten Zustandssummen eine ADE-Klassifikation [25][26].

Definition (2.13) Die Quantendimension $d_{n,m}$ des Sektors (n,m) ist definiert als die relative Größe im Vergleich zum Vakuumsektor:

$$d_{n,m} = \lim_{q \nearrow 1} \frac{\chi_{n,m}(q)}{\chi_{1,1}(q)} = \frac{S_{h_{n,m},0}}{S_{0,0}}$$

In der Algebraischen Quantenfeldtheorie ist der Vakuumsektor ausgezeichnet als Referenzdarstellung π_0 der Observablen-Algebra $\mathcal{A}$, die eine C^*-Algebra ist, auf dem Hilbertraum des Modells. Die übrigen HGD ergeben sich durch Zurückholen mit einem Endomorphismus ρ_i: $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ der Observablen-Algebra zu $\pi_0 \circ \rho_i$. Auf den unitären Äquivalenzklassen $[\pi_0 \circ \rho_i]$ solcher Darstellungen wird die Fusion definiert durch

$$[\pi_0 \circ \rho_i] \times [\pi_0 \circ \rho_j] := [\pi_0 \circ \rho_i \rho_j], \tag{2.14}$$

was wegen $\rho_i \rho_j \cong \rho_j \rho_i$ kommutativ ist. Durch Ausreduzieren erhält man den Fusionsring

$$[\pi_0 \circ \rho_i] \times [\pi_0 \circ \rho_j] = N_{ij}^k [\pi_0 \circ \rho_k]. \tag{2.15}$$

Zwischen den Fusionskoeffizienten N_{ij}^k und der modularen S-Matrix besteht die Beziehung [27]

$$N_{ij}^k = \sum_l \frac{S_{h_i,h_l} S_{h_j,h_l} S_{h_l,h_k}}{S_{h_l,0}}. \tag{2.16}$$

3. Pfade über Graphen

Hilberträume von Pfaden auf Bratteli-Diagrammen spielen sowohl im Falle von statistischen Modellen (Kapitel 4) als auch für CFT (Kapitel 5) eine zentrale Rolle [28][29][30]. Die auf diesen Räumen in natürlicher Weise operierenden Pfadalgebren sind AF-Algebren, im Falle der statistischen Modelle die Temperley-Lieb-Jones-Algebra [31][32]. Ein Hilfsmittel zur Klassifikation dieser Algebren sowie zur Beschreibung von Fusionsringen sind ihre K_0- oder Dimensions-Gruppen [33][34][35][36]. Die Radikale der Temperley-Lieb-Algebra bei der diskreten Serie von Jones-Indizes auf Seiten der statischen Modelle entsprechen der Restriktion auf RSOS-Modelle. Die entsprechende Restriktion auf Seiten der CFT wird vom annihilierenden Ideal [37] der Virasoro-Algebra in Minimalen Modellen geliefert.

3.1 Graphen

Ein endlicher Graph besteht aus einer endlichen Menge von Punkten (Vertices) und (ggf. gerichteten) Verbindungslinien zwischen diesen. Er wird durch eine Zusammenhangsmatrix $\mathcal{C}$ beschrieben.

Definition (3.1) Ein $\mathcal{C}$-Graph mit n Vertices wird repräsentiert durch eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{N}$. $\mathcal{C}_{ij}$ ist die Zahl der verbindenden Kanten von Vertex j zu Vertex i. Ist $\mathcal{C}$ symmetrisch, so heißt der Graph ungerichtet, andernfalls gerichtet.

In dieser Arbeit sind alle auftretenden Graphen ungerichtet. Häufig wird im folgenden vereinfachend $\mathcal{C}$ selbst als Graph bezeichnet, die Menge seiner Vertices als $\Sigma(\mathcal{C})$. $\|\cdot\|$ bezeichne die durch die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ induzierte Norm auf $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ und damit auf den Graphen: Die Norm des $\mathcal{C}$-Graphen ist $\|\mathcal{C}\|$. Nach Kronecker (siehe [30]) gilt das

Theorem (3.2) Sei X eine endliche Matrix über $\mathbb{Z}$. Dann ist entweder $\|X\| = 2\cos\frac{\pi}{q}$ mit $q \in \mathbb{N}^{\geq 2}$ oder $\|X\| \geq 2$. Für $q \geq 3$ gibt es $X \in \mathrm{Mat}_{[q/2]}(\{0,1\})$ mit $\|X\| = 2\cos(\frac{\pi}{q})$. ∎

Hieraus folgt insbesondere, daß die Menge der durch endliche Matrizen $M_{endlich}(\{0,1\})$ mit Norm kleiner zwei beschriebenen zusammenhängenden Graphen bijektiv ist zur Menge der einfach geschnürten Coxeter-Graphen ADE [30].

Definition (3.3) Ein $\mathcal{C}$-Graph heißt bipartit genau dann, wenn seine Vertexmenge $\Sigma(\mathcal{C})$ in zwei disjunkte endliche Mengen Σ_1, Σ_2 zerfällt, so daß $\mathcal{C}_{ij} = 0$, falls $i,j \in \Sigma_1$ oder $i,j \in \Sigma_2$. $\mathcal{C}$ hat dann die Gestalt $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I} \\ \mathcal{I}^T & 0 \end{pmatrix}$. Als Bezeichnung wird im folgenden $(\Sigma_2, \mathcal{I}, \Sigma_1)$ verwendet.

3.2 AF-Algebren, Bratteli-Diagramme und K-Theorie

Definition (3.4) Eine C^*-Algebra $\mathcal{A}$ ist eine normierte $\mathbb{C}$-Algebra mit Involution $(\cdot)^*$, deren Norm die Eigenschaft $\|aa^*\| = \|a\| \cdot \|a^*\|$ hat, und die bezüglich der Normtopologie vollständig ist.

Definition (3.5) Eine C^*-Algebra $\mathcal{A}$ heißt AF-Algebra genau dann, wenn eine dichte Unteralgebra von $\mathcal{A}$ direkter Limes eines induktiven Systems $\left(\mathcal{A}^{(n)}, \iota^{(n)}\right)_{n\geq 1}$ endlichdimensionaler C^*-Algebren $\mathcal{A}^{(n)}$ mit $\iota^{(n)}$: $\mathcal{A}^{(n)} \hookrightarrow \mathcal{A}^{(n+1)}$ ist: $\mathcal{A} = \varinjlim \mathcal{A}^{(n)}$.

Sei M_p die C^*-Algebra $\mathrm{Mat}_p(\mathbb{C})$. Da jede endlichdimensionale C^*-Algebra $\mathcal{A}^{(n)}$ einer Multimatrix-Algebra isomorph ist,

$$\mathcal{A}^{(n)} \cong M^{(n)}_{p(n)_1} \oplus \cdots \oplus M^{(n)}_{p(n)_{r(n)}},$$

ist die Einbettung $\iota^{(n)}: \mathcal{A}^{(n)} \hookrightarrow \mathcal{A}^{(n+1)}$ bis auf innere Automorphismen gegeben durch die Multiplizitäten $\mathcal{I}_{ij}^{(n)}$ der partiellen Einbettungen $\iota_i^{(n)}\Big|_{M^{(n)}_{p(n)_j}}$ (Einbettungen einfacher Faktoren):

$$\begin{aligned}\iota_i^{(n)}: \quad \bigoplus_{j=1,\dots,r(n)} M^{(n)}_{p(n)_j} &\hookrightarrow M^{(n+1)}_{p(n+1)_i}\\ (x_1,\dots,x_{r(n)}) &\longmapsto \operatorname{diag}(\underbrace{x_1,\dots,x_1}_{\mathcal{I}^{(n)}_{i,1}},\dots,\underbrace{x_{r(n)},\dots,x_{r(n)}}_{\mathcal{I}^{(n)}_{i,r(n)}},0,\dots,0)\end{aligned}$$

Mithin ist die C^*-Algebra $\mathcal{A}^{(n)}$ bis auf Isomorphismus durch eine endliche Menge Σ_n von $r(n)$ Vertices mit Gewichten $p(n)_j$ beschrieben und die Einbettungen $\mathcal{A}^{(n)} \hookrightarrow \mathcal{A}^{(n+1)}$ bis auf einen inneren Automorphismus durch die Zahl der verbindenden Kanten $\mathcal{I}_{ij}^{(n)}$ zwischen den Vertices j von Σ_n und i von Σ_{n+1}. Dies liefert einen bipartiten Graphen $(\Sigma_{n+1}, \mathcal{I}, \Sigma_n)$ mit Zusammenhangsmatrix $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I} \\ \mathcal{I}^T & 0 \end{pmatrix}$. $\mathcal{I}$ heißt in diesem Zusammenhang Einbettungsmatrix.

Definition (3.6) Ein Bratteli-Diagramm $\Sigma = \left(\Sigma_n, \mathcal{I}^{(n)}\right)_{n\geq 1}$ ist eine abzählbare Familie von bipartiten Graphen $\left(\Sigma_{n+1}, \mathcal{I}^{(n)}, \Sigma_n\right)$. Σ_n heißt n-te Stufe von Σ.

Aus obiger Konstruktion erhält man aus jedem Bratteli-Diagramm eine Isomorphieklasse von AF-Algebren (genauer: den direkten Limes von Multimatrix-Algebren als Repräsentanten aus dieser Klasse). Umgekehrt existiert für jede AF-Algebra $\mathcal{A}$ vermöge eines zugehörigen induktiven Systems $(\mathcal{A}^{(n)})$ ein Bratteli-Diagramm. Letzteres ist aber durch $\mathcal{A}$ nicht eindeutig bestimmt, da das $\mathcal{A}$ induzierende System $(\mathcal{A}^{(n)})$ natürlich nicht eindeutig ist. Ein Beispiel hierfür liefert folgende

Definition (3.7): Sei $(\Sigma_n, \mathcal{I}^{(n)})$ ein Bratteli-Diagramm, $(n_j)_j \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge. Dann heißt $(\Sigma_{n_j}, \mathcal{I}^{(n_{j+1}-1)} \cdot \ldots \cdot \mathcal{I}^{(n_j)})$ das auf (n_j) kontrahierte Bratteli-Diagramm. Diese Art der Kontraktion wird auch als "Telescoping" bezeichnet.

Per constructionem ist also die AF-Algebra eines Bratteli-Diagramms isomorph zu denen aller seiner Kontrahierten.

Definition (3.8) Zwei Bratteli-Diagramme heißen äquivalent, wenn sie zu derselben Isomorphieklasse von AF-Algebren gehören.

Definition (3.9) Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 0. Eine Halbgruppe $G_+ \subset G$ mit den Eigenschaften (1) $G_+ - G_+ = G$ und (2) $G_+ \cap (-G_+) = \{0\}$ heißt Positivitätskegel. Vermöge $a \leq b \;:\Longleftrightarrow\; b - a \in G_+$ wird auf G eine Ordnung definiert. $u \in G_+$ heißt Ordnungseinheit, wenn es für jedes $g \in G$ ein $n > 0$ ($n \in G,\ 0 \leq n,\ n \neq 0$) gibt mit $g \leq nu$. Das Tripel (G, G_+, u) heißt skaliert geordnete Gruppe.

Definition (3.10) Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra. $K_0(\mathcal{A})$ ist die (vermöge Grothendieck-Konstruktion und – zur Behandlung des nichtunitalen Falles – Reduktion) zur Halbgruppe der stabilen Äquivalenzklassen von Idempotenten in $M_\infty(\mathcal{A})$ assoziierte abelsche Gruppe. [35][38]

Da man in dieser Konstruktion mit einer Halbgruppe startet, ist in natürlicher Weise ein Positivitätskegel $K_0^+(\mathcal{A})$ gegeben. Ist $\mathcal{A}$ unital, so wird in der Regel die Klasse der Eins als Ordnungseinheit verwendet.

Sei X ein lokal-kompakter Hausdorff-Raum. Dann ist $K^*(X) = K_*(C(X))$ die klassische Topologische K-Theorie [39], also bis auf das Dimensionsaxiom eine Eilenberg-Steenrod-Cohomologietheorie.

Durch den Übergang zu stetigen Funktionen auf X wird die Varianz des Funktors in der Topologischen K-Theorie für Operatoralgebren umgekehrt.

Satz (3.11) Sei $\mathcal{A}$ eine AF-Algebra. Dann hat $K_0(\mathcal{A})$ einen Positivitätskegel und eine Ordnungseinheit. K_0 ist ein Funktor von der Kategorie der AF-Algebren in die skaliert geordneten Gruppen. [35] ∎

Eine einfache Matrixalgebra $\mathcal{A}_j$ hat die K_0-Gruppe $K_0(\mathcal{A}_j) = \mathbb{Z}$: Die Klasse eines Projektors ist repräsentiert durch seine Dimension. Für endlichdimensionale C^*-Algebren ist nach Zerlegung in einfache Faktoren $\mathcal{A} = \bigoplus_{1\leq i\leq r} \mathcal{A}_i$ die Dimensionsgruppe wegen der Funktorialität von K_0 gegeben durch $K_0(\mathcal{A}) = \bigoplus_{1\leq i\leq r} K_0(A_i) = \mathbb{Z}^r$. Nach Elliott's Hauptsatz der Theorie der AF-Algebren [33][35] ist die skaliert geordnete Dimensionsgruppe $K_0(\mathcal{A})$ eine vollständige Isomorphismeninvariante für $\mathcal{A}$ in der Kategorie der AF-Algebren:

Theorem (3.12) Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ AF-Algebren und σ: $K_0(\mathcal{A}) \to K_0(\mathcal{B})$ ein Isomorphismus skaliert geordneter Gruppen, so gibt es einen gelifteten Isomorphismus ϕ: $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ($\phi_* \equiv K_0(\phi) = \sigma$). ∎

Korollar (3.13) Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ AF-Algebren. Dann gilt: $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \iff (K_0(\mathcal{A}), K_0^+(\mathcal{A}), [1_\mathcal{A}]) \cong (K_0(\mathcal{B}), K_0^+(\mathcal{B}), [1_\mathcal{B}])$. ∎

Die durch den Graphen beschriebene Einbettung $\iota^{(n)}$: $\mathcal{A}^{(n)} \hookrightarrow \mathcal{A}^{(n+1)}$ von Algebren induziert aufgrund der Funktorialität von K_0 einen Homomorphismus von K_0-Gruppen $\iota_*^{(n)} \equiv K_0(\iota^{(n)})$: $K_0(\mathcal{A}^{(n)}) \longrightarrow K_0(\mathcal{A}^{(n+1)})$, der durch die Matrix $\mathcal{I}^{(n)}$ beschrieben wird.

Definition (3.14) Ein Bratteli-Diagramm über einem Graphen $\mathcal{C}$ ist ein Bratteli-Diagramm $(\Sigma^{(n)}, \mathcal{I}^{(n)})$ mit $\mathcal{I}^{(n)} = \mathcal{C}\ \forall n$.

Korollar (3.15) Sei $\mathcal{C}$ invertierbar. Sei $\mathcal{A}$ direkter Limes des induktiven Systems $(\mathcal{A}^{(n)}, \iota^{(n)})$, das durch das Bratteli-Diagramm über $\mathcal{C}$ gegeben ist. Dann gilt:

$$\ldots \longrightarrow K_0(\mathcal{A}^{(n)}) \xrightarrow[K_0(\iota^{(n)})=\mathcal{C}]{\cong} K_0(\mathcal{A}^{(n+1)}) \xrightarrow[K_0(\iota^{(n+1)})=\mathcal{C}]{\cong} \ldots \cong K_0(\mathcal{A})\ ∎$$

Durch verschiedene Auswahlen eines Anfangsvertex $*$, $\Sigma^{(0)} = *$ also $\mathcal{A}^{(0)} = \mathbb{C}$ erhält man disjunkte Pfadräume $\mathcal{P}_*$ auf dem Bratteli-Diagramm samt der dazugehörigen Pfadalgebra. $\mathcal{P}_*$ werden im folgenden mit den (chiralen) Superauswahlsektoren Minimaler Modelle identifiziert.

3.3 Pfadräume und Pfadalgebren

Definition (3.16) Die Folgen $(m_j)_{j\geq 0}$ mit Werten $\{0, ..., n-1\}$, Anfangswert α und Asymptotik $\Omega \subset \mathbb{N}$ über einem $\mathcal{C}$-Graph ($\mathcal{C} \in M_n(\{0,1\})$) seien mit

$$\mathcal{S}(\mathcal{C}, \alpha, \Omega) = \left\{(m_j)_{j\geq 0} \in \{0, ..., n-1\}^{\mathbb{N}} \mid m_j \in \Omega \text{ für } j \gg 0; m_0 = \alpha, \mathcal{C}_{m_{j+1}+1, m_j+1} = 1\right\}$$

bezeichnet. Der durch $\mathcal{S}$ frei erzeugte $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathcal{P}(\mathcal{C}, \alpha, \Omega) :=< \mathcal{S}(\mathcal{C}, \alpha, \Omega) >_\mathbb{C}$ wird vermöge jedes inneren Produkts, in dem je zwei verschiedene Pfade orthogonal sind, ein Hilbertraum. Pfade der Länge N werden beschrieben durch $\mathcal{P}(\mathcal{C}, \alpha, \Omega)_N = \{(l_j)_j \in \mathcal{P}(\mathcal{C}, \alpha, \Omega) \mid l_j \in \Omega\, \forall j > N\}$.

$\mathcal{C}$ hat n Vertices und $\{\epsilon_i\}_{i=1,\ldots,n}$ bezeichne die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$, $< \cdot, \cdot >$ das euklidische Skalarprodukt von $\mathbb{R}^n$. Es sei $\epsilon_\Omega = \sum_{i\in\Omega} \epsilon_i$. Dann gilt offensichtlich folgendes

Lemma (3.17): Die Dimension des endlichen Pfadraums mit Pfadlänge N, Anfang α und Ende Ω ist

$$\dim(\mathcal{P}(\mathcal{C},\alpha,\Omega)_N) = <\epsilon_\Omega, \mathcal{C}^N \epsilon_\alpha> . \blacksquare$$

Definition (3.18) $AF(\mathcal{C},\alpha)$ sei die durch das Bratteli-Diagramm über $\mathcal{C}$ mit Anfangsvertex α gegebene AF-Algebra. Sie operiert auf den Pfadräumen $\mathcal{P}(\mathcal{C},\alpha,\Omega)$ in natürlicher Weise und heißt daher auch Pfadalgebra. Die Algebra $AF(\mathcal{C},\alpha)^{(n)}$ wird erzeugt von denjenigen linearen Abbildungen zwischen den Pfaden $\mathcal{P}(\mathcal{C},\alpha,\Omega)_n$ der Länge n mit festem Anfangsvertex α, die auch den Endvertex des Pfades festhalten.

Daher zerfällt die Algebra $AF(\mathcal{C},\alpha)^{(n)}$ in einfache Faktoren, die den unterschiedlichen Endvertices entsprechen, hat also bezüglich des Endvertex eine Blockstruktur. Bei der Einbettung in die auf Pfaden der Länge $n+1$ operierenden Algebra $AF(\mathcal{C},\alpha)^{(n+1)}$ kann jeder einem Endvertex β in $\mathcal{P}_n$ zugeordnete einfache Faktor von $AF^{(n)}$ per constructionem nur in einen solchen einfachen Faktor von $AF^{(n+1)}$ eingebettet werden, dessen zugeordneter Endvertex auf dem Graphen $\mathcal{C}$ mit β verbunden ist. Die Einbettungsstruktur der $AF^{(n)}$ wird also durch das Bratteli-Diagramm über $\mathcal{C}$ beschrieben. Tatsächlich ist also der direkte Limes dieser Algebren die durch das Bratteli-Diagramm definierte AF-Algebra $AF(\mathcal{C},\alpha)$. Außerdem erhält man aus dieser expliziten Konstruktion der Algebra das im folgenden Lemma angegebene Erzeugendensystem lokaler Pfaddeformationen.

Lemma (3.19) $AF(\mathcal{C},\alpha)$ ist in der Pfaddarstellung auf $\mathcal{P}(\mathcal{C},\alpha,\Omega)$ der Abschluß von

$$\Big\langle \Big\{ \forall k \in \mathrm{I\!N}, (l_j)_{j\le k}, (l'_j)_{j\le k} \in \mathrm{I\!N}^{\{0,\ldots,k\}} : \quad \bigoplus_{(l_j)_{j>k}\in\mathcal{O}} |(l'_0,\ldots,l'_k,l_{k+1},l_{k+2},\ldots)_j>< (l_j)_j| \\ \text{wobei } \mathcal{O} = \{(l_j)_{j>k} \in \mathrm{I\!N}^{\mathrm{I\!N}^{>k}} \text{mit } (l_j)_j, (l'_0,\ldots,l'_k,l_{k+1},l_{k+2}\ldots)_j \in \mathcal{P}(\mathcal{C},\alpha,\Omega)\} \quad \Big\} \Big\rangle_{\mathbb{C}}$$

(in der üblichen Dirac-Notation). [11] $\blacksquare$

Ist $\mathcal{C}$ invertierbar, so ist nach obigen Ergebnissen $K_0(AF(\mathcal{C},\alpha)) \cong K_0(AF(\mathcal{C},\alpha)^{(n)}) \cong \mathbb{Z}^\nu$, wenn ν die Zahl der Vertices des $\mathcal{C}$-Graphen und damit die Zahl der Faktoren von $AF(\mathcal{C},\alpha)^{(n)}$ ist. Für singuläre Inzidenzmatrizen $\mathcal{C}$ ist die Situation dagegen komplizierter. Speziell für das fünfte Kapitel benötigt man hier im Falle der Matrix $\mathcal{C} = \mathcal{B}_\nu \in M_\nu(\mathbb{Z})$, in der alle ν^2 Einträge gleich eins sind, das

Lemma (3.20) $K_0(AF(\mathcal{B}_\nu,\alpha)) = \mathbb{Z}[\frac{1}{\nu}]$.

Der Fall $\nu = 2$ ist auch in [34] behandelt.

Beweis Sei $\mathcal{A} := AF(\mathcal{B}_\nu,\alpha)$, und seien $j^{(n)}$: $\mathcal{A}^{(n)} \hookrightarrow \mathcal{A}$ die nach Definition des direkten Limes existierenden kanonischen Einbettungen, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{A}^{(n)} & \xrightarrow{\iota^{(n)}} & \mathcal{A}^{(n+1)} & & K_0(\mathcal{A}^{(n)}) & \xrightarrow{\iota_*^{(n)}} & K_0(\mathcal{A}^{(n+1)}) \\ j^{(n)} \searrow & & \swarrow j^{(n+1)} & \Longrightarrow & j_*^{(n)} \searrow & & \swarrow j_*^{(n+1)} \\ & \mathcal{A} & & & & K_0(\mathcal{A}) & \end{array}$$

Darin ist $K_0(\mathcal{A}^{(n)}) = \mathbb{Z}^\nu$ und $\iota_* = \mathcal{B}_\nu$. $\mathcal{B}_\nu$ ist vom Rang 1 und hat den Perron-Frobenius-Eigenvektor $D = (1,\ldots,1)$, also $\mathrm{Ker}(\iota_*) = < D >^\perp$ und damit nach obigem Diagramm auch $< D >^\perp \subset \mathrm{Ker}(j_*^{(n)})$. Wegen $\iota_*(xD + < D >^\perp) = \nu x D$ und $j_*^{(n)} = j_*^{(n+1)} \circ \iota_*$: $\mathbb{Z}^\nu \longrightarrow K_0(\mathcal{A})$ folgt $j_*^{(n+1)}(z) = \frac{1}{\nu} j_*^{(n)}(z)$ für $z \in \mathbb{Z}^\nu$, und wegen $\mathrm{Im}(j_*^{(n)}) \cong \mathbb{Z}$ schließlich $K_0(\mathcal{A}) \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{\nu}]$. $\blacksquare$

3.4 Die Temperley-Lieb-Jones-Algebra (TLJA)

Definition (3.21) Die Temperley-Lieb-Jones-Algebra (TLJ-Algebra) $\mathcal{A}_{\beta,k}$ mit $\beta \in \mathbb{C}^*$ ist die unitale $\mathbb{C}$-Algebra mit Erzeugenden $e_1, ..., e_{k-1}$ und Relationen

$$\begin{aligned} e_i^2 &= e_i \\ \beta e_i e_j e_i &= e_i \quad |i-j| = 1 \\ e_i e_j &= e_j e_i \quad |i-j| \geq 2. \end{aligned}$$

β heißt Jones-Index.

In der statistischen Mechanik wird üblicherweise die Notation $U_i = e_i\sqrt{Q}$ mit $Q = \beta$ verwendet, also $U_i^2 = \sqrt{Q}U_i,\ U_iU_{i\pm1}U_i = U_i,\ U_iU_j = U_jU_i$ sonst.

In Kapitel 4 werden konkrete Darstellungen der TLJ-Algebra angegeben. Dabei handelt es sich um Darstellungen als orthogonale Projektionen auf Hilberträumen (Pfadräumen). In dieser Situation gilt das folgende

Theorem (3.22): Sei $\beta \neq 0$ und $(e_j)_{j\geq 0}$ eine abzählbare Familie von orthogonalen Projektionen $e_i^* = e_i$, die der TLJ-Algebra $\mathcal{A}_{\beta,\infty}$ genügen. Ist diese Darstellung nichttrivial (d.h. $e_1 \neq 0$), so gilt: Entweder ist $\beta \geq 4$ oder

$$\exists r \in \mathbb{N}^{\geq 3} \text{ mit } \beta = 4\cos^2(\pi/r). \blacksquare$$

Der Beweis ist in [30] (Anhang II) zu finden.

Definition (3.23) Die Funktionen $p_n(2\cos(\pi/r)) = \frac{\sin((n+1)\pi/r)}{\sin(\pi/r)}$ für $r \in \mathbb{R}$ sind die Tschebyscheff-Polynome zweiter Art $p_0(x) = 1,\ p_1(x) = x,\ p_{n+1}(x) = xp_n(x) - p_{n-1}(x)$.

Definition (3.24) Für $p_j(\sqrt{\beta}) \neq 0\ \forall j \leq k-1$ sei in $\mathcal{A}_{\beta,k+1}$

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 \\ F_2 &= 1 - e_1 \\ &\vdots \\ F_{m+1} &= F_m - \sqrt{\beta}\frac{p_{m-1}(\sqrt{\beta})}{p_m(\sqrt{\beta})}F_m e_m F_m \quad (m < k). \end{aligned}$$

Lemma (3.25) Für $j \leq m$ ist $e_jF_{m+1} = F_{m+1}e_j = 0$. [32] $\blacksquare$

Theorem (3.26) Ist $p_j(\sqrt{\beta}) \neq 0\ \forall j \leq k-1$ und $p_k(\sqrt{\beta}) = 0$, so ist $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\beta,k+1}$ nicht halbeinfach. Insbesondere ist mit $\gamma = F_ke_kF_k$ das zweiseitige Ideal $\mathcal{A}\gamma\mathcal{A}$ nilpotent und eindimensional. [32][30] $\blacksquare$

Darstellungen der TLJ-Algebra mit Jones-Index β durch Projektoren in Pfadräumen auf ADE-Coxeter-Graphen der Norm $\sqrt{\beta}$ müssen also das Radikal der TLJ-Algebra trivial darstellen, insbesondere das obengenannte Ideal. Dies entspricht dem Abschneiden des Graphen $\mathcal{C}$ mit $\beta = \|\mathcal{C}\|^2$ gegenüber dem zweiseitig unendlichen A_∞ [29] und führt in den in statistischen Modellen auftretenden TLJ-Algebren zu zusätzlichen Relationen [40].

4. Pfadräume in statistischen Modellen

4.1 Die Corner-Transfermatrix in IRF-Modellen

Sei $\mathcal{L}$ ein zweidimensionales quadratisches Gitter und $\mathcal{C}$ ein Graph mit Vertices $\Sigma(\mathcal{C})$. Jeder Gitterpunkt $i \in \mathcal{L}$ trage einen Spin $\sigma_i \in \Sigma(\mathcal{C})$, also $\sigma_{(\cdot)}\colon\ \mathcal{L} \to \Sigma(\mathcal{C})$. Für die Anwendungen in dieser Arbeit sind nur endliche Graphen $\mathcal{C}$ relevant, und die Modelle genügen der Zusatzbedingung, daß der Wertebereich der Spins σ_i, σ_j an benachbarten Gitterpunkten i, j auf benachbarte Vertices des Graphen $\mathcal{C}$ restringiert ist: $\mathcal{C}_{\sigma_i \sigma_j} \neq 0$ (verallgemeinerte RSOS-Modelle). Die Boltzmann-Gewichte werden beschrieben durch die von einem Spektralparameter u abhängige Abbildung $w(u)\ :\ \Sigma(\mathcal{C})^{\otimes 4} \to \mathbb{R}$. Jeder Elementarzelle $< abcd >$ des Gitters $\mathcal{L}$ wird ein Boltzmann-Gewicht w zugeordnet vermöge $(abcd) \mapsto w(u; \sigma_a, \sigma_b, \sigma_c, \sigma_d)$; der entsprechende Energiebeitrag ist $\varepsilon = -kT \log(w)$. Ein so definiertes Modell heißt IRF-Modell (Interaction round a face). Die Zustandssumme $Z_N(u) = \sum_{\sigma \in \Sigma(\mathcal{C})^{\mathcal{L}}} \prod_{<ijkl>} w(u; \sigma_i, \sigma_j, \sigma_k, \sigma_l)$ – das Produkt erstreckt sich über alle Elementarzellen $< ijkl >$ des Gitters – läßt sich vermöge der zeilenweise operierenden Transfermatrix (TM) $T_{\alpha,\beta}(u) = \prod_i w(u; \alpha_i, \alpha_{i+1}, \beta_{i+1}, \beta_i)$ (wobei α, β Einschränkungen von σ auf aufeinanderfolgende Zeilen von $\mathcal{L}$ sind mit fortlaufender Numerierung der Spins) umschreiben in $Z(u) = \mathrm{Tr}_V T(u)^N$, falls N die Zahl der Zeilen des Gitters $\mathcal{L}$ und V der Zustandsraum einer Zeile (Spinkette) ist. Gilt $[T(u), T(v)] = 0$ über ein Intervall der Spektralparameter u, v, so ist das derart definierte statistische Modell exakt lösbar. Hinreichende Bedingung hierfür ist die Yang-Baxter-Gleichung $\sum_g w_{12}(u; abgf) w_{13}(u+v; fgde) w_{23}(v; gbcd) = \sum_g w_{23}(u; gcde) w_{13}(u+v; abcg) w_{12}(v; fage)$ [20].

In den im folgenden betrachteten Modellen genügen die Boltzmanngewichte der Yang-Baxter-Gleichung, besitzen die Reflexionssymmetrie $w(u; abcd) = w(u; cbad) = w(u; adcb)$ und erfüllen bei Temperatur Null die Randbedingung $w(0; abcd) = \delta_{a,c}$.

Sei Q_1 ein Quadrant des Gitters $\mathcal{L}$ mit Randkanten H_1, H_2 (Halbdiagonalen), auf denen die Spins σ_i vom Zentrum aus mit $0, 1, 2, ...$ durchnumeriert sind. Auf den Spinkonfigurationen $\alpha_{(k)} \in \Sigma(\mathcal{C})^{H_k}$ der Halbdiagonalen wird die Corner-Transfermatrix (CTM) dieses Quadranten definiert als

$$A_{\alpha_{(1)}\alpha_{(2)}}(u) = \delta(\sigma_0, \sigma_0') \sum_{\sigma \in \Sigma(\mathcal{C})^{Q_1}} \prod_{<ijkl>} w(u; \sigma_i, \sigma_j, \sigma_k, \sigma_l), \tag{4.1}$$

wobei sich das Produkt über alle Elementarzellen in Q_1 erstreckt und die Halbdiagonalen-Spins $\alpha_{(1)}, \alpha_{(2)}$ ebenso wie die äußeren Randspins festgehalten werden. In den übrigen Quadranten Q_k werden analog CTM definiert, die mit B, C und D bezeichnet seien. Die Zustandssumme ist damit reduziert auf $Z = \mathrm{Tr}_{H_1}(ABCD)$, die Einpunktfunktion für den Zentralen Spin zu $\langle \sigma_0 \rangle = \frac{1}{Z} \mathrm{Tr}_{H_1}(\sigma_0 ABCD)$. Durch die Verwendung der TM oder CTM wird ein zweidimensionales Gittermodell mit Zustandsraum $\subset \Sigma(\mathcal{C})^{\mathcal{L}}$ also auf eine eindimensionale Quantenkette mit Zustandsraum $\subset \Sigma(\mathcal{C})^V$ bzw. $\Sigma(\mathcal{C})^{H_1}$ reduziert.

Über die Reflexionseigenschaften des Systems läßt sich für die CTM die Funktionalgleichung $A(u)A(v) = A(u+v)$ ableiten, also $A(u) = \exp(-uH^{CTM})$ [20]. Für die CTM A des Quadranten Q erhält man den erzeugenden Operator

$$\begin{aligned} H^{CTM} &= -\frac{d}{du}A_{\sigma,\sigma'}(u)\Big|_{u=0} \\ &= -\delta(\sigma_0,\sigma_0')\sum_{\alpha}\sum_{<ijkl>}\dot{w}(0;\alpha_i\alpha_j\alpha_k\alpha_l)\prod_{<abcd>\neq<ijkl>}\delta_{\alpha_a,\alpha_c} \\ &= -\delta(\sigma_0,\sigma_0')\sum_{i>0}\prod_{j\neq i}\delta(\sigma_j,\sigma_j')\sum_c \delta(c,\sigma_i')\dot{w}(0;c,\sigma_{i+1},\sigma_i,\sigma_{i-1})i \\ &= -\sum_{i>0} iH_i, \end{aligned} \tag{4.2}$$

worin wegen der Reflexionssymmetrie der Boltzmanngewichte die Operatoren

$$H_i:\ (\cdots,\sigma_{i-1},\sigma_i,\sigma_{i+1},\cdots)\longmapsto\sum_c \dot{w}(0;c,\sigma_{i-1},\sigma_i,\sigma_{i+1})(\cdots,\sigma_{i-1},c,\sigma_{i+1},\cdots) \tag{4.3}$$

den Spin σ_i auf zulässige Werte c entsprechend den Restriktionen an die Zustände des Modells umklappen. $[H^{CTM},\cdot]$ erzeugt als Boostoperator den spektralen Fluß der TM [41].

Man beachte, daß in obiger Herleitung keine Restriktion auf Temperatur Null ($k \longrightarrow 0$) angenommen wurde. Letzteres ist das übliche Vorgehen beim Nachweis des Zusammenhangs zwischen (nichtkritischer) Virasoro-Algebra und CTM-Hamiltonian, da in diesem Falle H^{CTM} in der natürlichen Pfadbasis direkt diagonal ist. Am kritischen Punkt ist dagegen obige H^{CTM} in dieser Basis nicht mehr diagonal, was die Bestimmung des Spektrums aufwendiger macht, aber die Klarstellung eines expliziten Zusammenhangs zwischen CFT und statistischer Mechanik am kritischen Punkt verspricht.

4.2 Die Temperley-Lieb-Klasse, statistische Modelle auf Pfaden

Definition (4.4) Die Elementarzellen-Transfermatrix an der i^{ten} Elementarzelle entlang einer Diagonalen H ist

$$(X_i(u))_{\sigma,\sigma'} = w(u;\sigma_i,\sigma_{i+1},\sigma_i',\sigma_{i-1})\prod_{j\neq i}\delta(\sigma_j,\sigma_j')$$

oder kurz $X_i = 1\otimes\cdots\otimes 1\otimes w\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1$.

Insbesondere ist also $H_i = \dot{X}_i(0)$. Da die Boltzmanngewichte w der Yang-Baxter-Gleichung genügen, erfüllen die X_i die Relationen der Zopfgruppe

$$\begin{aligned} X_i(u)X_j(v) &= X_j(v)X_i(u) \quad |i-j|\geq 2 \\ X_i(u)X_{i+1}(u+v)X_i(v) &= X_{i+1}(v)X_i(u+v)X_{i+1}(u). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Definition (4.6) Die Temperley-Lieb-Klasse enthält die statistischen Modelle mit Temperley-Lieb-Wechselwirkung TLI, d.h. mit Boltzmanngewichten $w(u;a,b,c,d) = \delta(a,c) + h_{a,b}h_{c,d}(u)\delta(b,d)$ und Elementarzellentransfermatrizen X_i aus der TLJ-Algebra $<\{U_j\}>$ zum Jones-Index Q, $X_j(u) = 1 + s(u)U_j$ [42][43][44]. Darin ist

$$Q = \begin{cases} 4\cos^2\lambda, & Q<4 \\ 4\cosh^2\lambda, & Q>4 \end{cases} \qquad s(u) = \begin{cases} \frac{\sin u}{\sin(\lambda-u)}, & Q<4 \\ \frac{u}{1-u}, & Q=4 \\ \frac{\sinh u}{\sinh(\lambda-u)}. & Q>4 \end{cases}$$

Wichtige Beispiele für statistische Modelle aus der TL-Klasse liefern die ABF-Modelle und die kritischen ADE-Modelle (Pasquier). Letztere erhält man speziell für $h_{ab} = \sqrt{S_b/S_a}$, wobei S der Eigenvektor eines ADE-Graphen ist und die TLJ-Algebra auf dem Bratteli-Diagramm über diesem Graphen operiert [10][11][45].

Definition (4.7) Ein kritisches ADE-Modell oder Pasquier-Modell ist ein statistisches Modell der TL-Klasse über einem ADE-Coxeter-Graphen $\mathcal{C}$ mit (Perron-Frobenius-)Eigenvektor S, definiert durch die Erzeugenden der TLJ-Algebra

$$U_j(\sigma, \sigma') = \sqrt{\frac{S_{\sigma_j} S_{\sigma'_j}}{S_{\sigma_{j-1}} S_{\sigma_{j+1}}}} \delta(\sigma_{j-1}, \sigma_{j+1}) \prod_{i \neq j} \delta(\sigma_i, \sigma'_i).$$

S muß nicht notwendigerweise der Perron-Frobenius-Eigenvektor von $\mathcal{C}$ sein. Andernfalls ist das so konstruierte Modell allerdings nicht unitär. Die Boltzmanngewichte der Pasquier-Modelle ergeben sich damit zu

$$w(u; a, b, c, d) = \delta(a, c) + \frac{\sin u}{\sin(\lambda - u)} \sqrt{\frac{S_a S_c}{S_b S_d}} \delta(b, d) \tag{4.8}$$

Definition (4.9) Das q-Zustands-Potts-Modell ist das TLI-Modell über dem Graphen mit der $(q+1) \times (q+1)$-Zusammenhangsmatrix

$$\mathcal{U}_q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

$\mathcal{U}_q$ hat den Perron-Frobenius-Eigenwert $\sqrt{q}$ mit Eigenvektor $S = (\sqrt{q}, 1, 1, \cdots, 1)$.

Definition (4.11) Ein BF-Modell [9] ist ein statistisches Modell der TL-Klasse über einem A_n-Coxeter-Graph A_n mit Eigenwerten $\Lambda_j(A_n) = 2\cos(m_j \pi / h)$ ($h = n+1$ Coxeter-Zahl von A_n, $m_j = 1, ..., n$ Coxeter-Exponenten) und Eigenvektoren

$$S = S_{A_n}^{m_j} = \left(\sin \frac{m_j \pi}{n+1}, \sin \frac{2 m_j \pi}{n+1}, ..., \sin \frac{n m_j \pi}{n+1} \right). \tag{4.12}$$

Für $m_j = 1$ sind diese Modelle wiederum unitär, heißen ABF-Modelle (oder RSOS-Modelle) und entsprechen der unitären Serie Virasoro-Minimaler Modelle der CFT.

4.3 Corner-Transfermatrix bei Temperatur Null

Im Temperatur Null-Limes $k \to 0$ frieren die Spins auf einer der beiden Diagonalrichtungen des Gitters ein, so daß die CTM (bzw. H^{CTM}) sofort diagonal ist. Baxter und Forrester haben gezeigt [8][9], daß bei Temperatur Null die Realisierung des ABF-Modells auf dem Pfadraum

$$\mathcal{P}(A_n, r, \{s, s+1\}),\ 1 \leq r \leq n,\ 1 \leq s \leq n-1 \tag{4.13}$$

besonders einfach wird: In diesem Falle sind die in der CTM-Summe

$$CTM = \mathrm{Tr}_{(\sigma)} q^{\phi(\sigma_j)} \tag{4.14}$$

auftretenden Einpunktfunktionen ϕ auf der Quantenkette ("lokale Zustandswahrscheinlichkeiten") gegeben durch [8]

$$\phi((l_i)) = \sum_{i \geq 1} i f(l_{i-1}, l_i, l_{i+1}). \tag{4.15}$$

Daher ist H^{CTM} bis auf eine Konstante der $\mathcal{P}(A_n, r, \{s, s+1\})$-Endomorphismus

$$(l_j)_j \longmapsto \phi(l)(l_j)_j, \tag{4.16}$$

wobei die Energiegewichte für die unitären Modelle

$$f(l \pm 1, l, l \mp 1) = 1/2, \qquad f(a, b, c) = 0 \text{ sonst} \tag{4.17}$$

sind. In der Verallgemeinerung auf alle A_n-Modelle [9][46] ist zusätzlich $c(l, l \pm 1, l) = \mp[l(p-q)/p]$ für $p > q$. Für ABF-Modelle ist also bei Temperatur Null bis auf eine Konstante

$$H^{CTM}(l_i)_i = \left(\frac{1}{4} \sum_{j \geq 1} j |l_{j+1} - l_{j-1}| \right) (l_i)_i. \tag{4.18}$$

Wie in [12][46] gezeigt, erhält man auf diese Weise für die nichtkritische CTM das Energiespektrum chiraler Sektoren Minimaler Modelle der CFT. Insbesondere werden durch die Restriktion auf A_n gegenüber dem beidseitig unendlichen Graphen A_∞ Nullvektoren erzeugt, deren unterste im Pfadraum $\mathcal{P}(A_n, r, \{s, s+1\})$ die Energien (H^{CTM}-Eigenwerte) von rs und $(n+1-r)(n-s)$ über dem offensichtlichen Grundzustand mit Energie $(s-r)(s-r+1)/4$ haben. Insgesamt gilt der

Satz (4.19) H^{CTM} für ABF-Modelle bei Temperatur Null hat die Eigenschaft

$$\mathrm{ch}_{n,m}^{(p,p+1)}(q) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{P}(A_p, m, \{n, n+1\})} q^{H^{CTM}}, \tag{4.20}$$

wobei ch der Charakter für die entsprechende Darstellung der Virasoro-Algebra ist. ∎

Speziell für das Ising-Modell läßt sich die ABF-H^{CTM} auch ausdrücken durch $H^{CTM} = \sum_{i \geq 0}(i + 1/2)(1 - e_{2i+1})$ auf den Pfaden mit $\alpha = 1$ in $\mathcal{P}(A_3, \alpha, \{\omega, \omega+1\})$ bzw. durch $H^{CTM} = \sum_{i \geq 1} i(1 - e_{2i})$ auf denen mit $\alpha = 2$ [47]. Insbesondere ist hierbei der Grundzustand auf Energie Null angehoben. Für andere ABF-Modelle ist eine entsprechende Temperatur-Null-Darstellung durch die halbe TLJ-Algebra in dieser Form nicht möglich [29].

4.4 Corner-Transfermatrix bei kritischer Temperatur

Aus (4.2) folgt für die Pasquier-Modelle wegen (4.8) für den CTM-Generator im Limes $u \to 0$

$$H^{CTM} = -\frac{1}{\sin\lambda}\sum_{i>0} iU_i = -\frac{2}{\tan\lambda}\sum_{i>0} ie_i, \tag{4.21}$$

worin $e_j = U_j/\sqrt{Q}$. Mit $\lambda = \frac{\pi}{n+1}$ hat die Zusammenhangsmatrix von A_n den Perron-Frobenius-Eigenvektor

$$S = (\sin(\lambda), \sin(2\lambda), \sin(3\lambda), \ldots \sin(n\lambda))$$

und Eigenwert $\sqrt{q} = 2\cos(\lambda)$. Nach (4.7) werden die Temperley-Lieb-Generatoren auf dem A_n-Graphen dabei dargestellt als

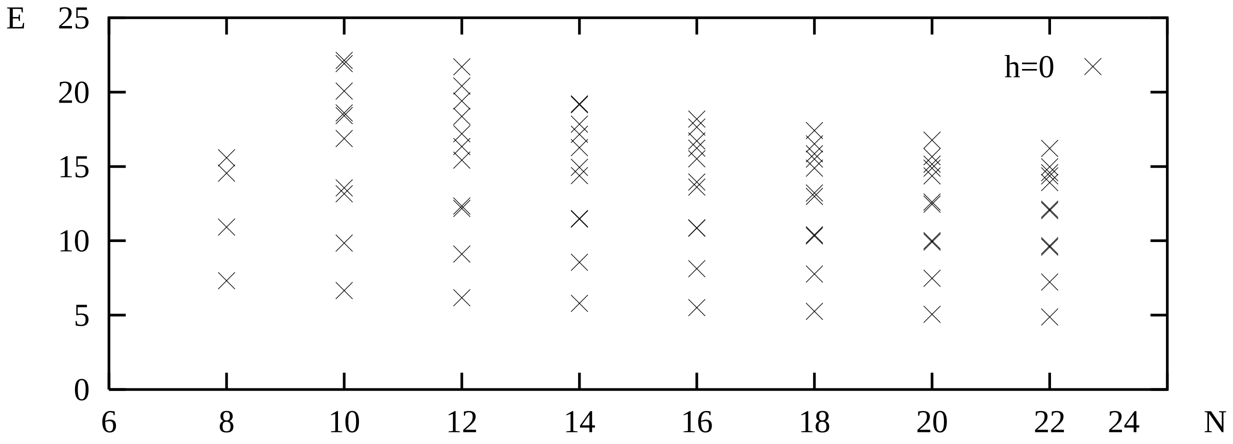
$$e_j(\sigma, \sigma') = \frac{\tan\lambda}{2}\frac{\sqrt{S_{\sigma_j} S_{\sigma'_j}}}{S_{\sigma_{j-1}} S_1}\delta(\sigma_{j-1}, \sigma_{j+1})\prod_{i\neq j}\delta(\sigma_i, \sigma'_i). \tag{4.22}$$

Für kleine Kettenlängen N wurde auf dem Pfadraum $\mathcal{P}(A_n, r, \{s, s+1\})$ die Matrix von $-\sum_{i=1}^{N} ie_i$ erzeugt, und mittels Vektoriteration die untersten Eigenwerte E bestimmt. Da auf einen das mit wachsender Kettenlänge N quadratische Abfallen der Grundzustandsenergie kompensierenden additiven Term verzichtet wurde, sind im folgenden jeweils die Abstände zum Grundzustand angegeben. Rechnungen zur Überprüfung der Ganzzahligkeit des Spektrums und zur Bestimmung der Entartungen wurden für alle Sektoren von $c(4,5) = 7/10$ (A_4-Graph) durchgeführt, ebenso zur Kontrolle für das Ising-Modell (A_3-Graph) und sporadisch für Sektoren des Dreizustands-Pottsmodells $c = 4/5$ (A_5-Graph). Zur Beschleunigung der Konvergenz bei der Bestimmung der Entartungen ist eine Verschiebung im Summationsindex von Vorteil. Bei der Berechnung der im folgenden abgedruckten Abbildungen für die sechs Sektoren des Modells $c = 7/10$ wurde eine solche Indexverschiebung um 3 verwendet, um das Ablesen der Charaktere zu erleichtern. Die Spektren wurden jeweils soweit berechnet, wie dies zur eindeutigen Identifizierung des entsprechenden Sektors der zugeordneten CFT durch Vergleich des H^{CTM}-Spektrums mit deren Character erforderlich war. Die den Sektor bestimmenden Randbedingungen an die Pfade stimmten dabei stets mit denen für Temperatur Null überein. Eine direkte Bestimmung der h-Werte aus der relativen Lage der Grundzustände in den verschiedenen Sektoren war wegen ihres schnellen Anwachsens mit der Kettenlänge N nicht möglich.

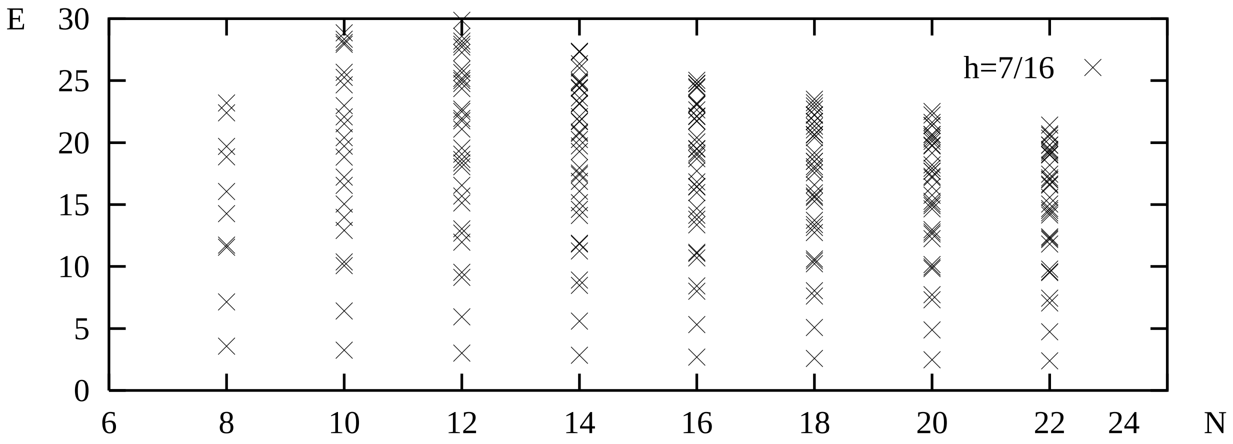
Die asymptotische Ganzzahligkeit des Spektrums wurde mit unverschobenen Summationsindizes untersucht. Der bei kleinen Kettenlängen N dominierende Beitrag zum Verhalten der Eigenwerte klingt mit $1/N$ ab. Durch Extrapolation ergeben sich für die Lage des ersten und zweiten Niveaus $E_{1,2}$ über dem Grundzustand die nebenstehend abgedruckten Werte. Deren Verhältnis stimmt im Rahmen des auf unter 10% abzuschätzenden Gesamtfehlers aus der Extrapolation (einschließlich systematischer Fehler nach Vergleich unterschiedlicher Verfahren) mit den erwarteten Werten 3/2 im Vakuumsektor bzw. 2 in den übrigen Sektoren überein.

h	E_1	E_2	E_2/E_1
0	1.86	2.91	1.56
7/16	0.96	1.99	2.07
3/2	0.96	1.87	1.95
		1.93	2.01
3/80	0.88	1.80	2.05
		1.84	2.09
3/5	0.99	1.87	1.89
		2.03	2.05
1/10	0.89	1.87	2.10

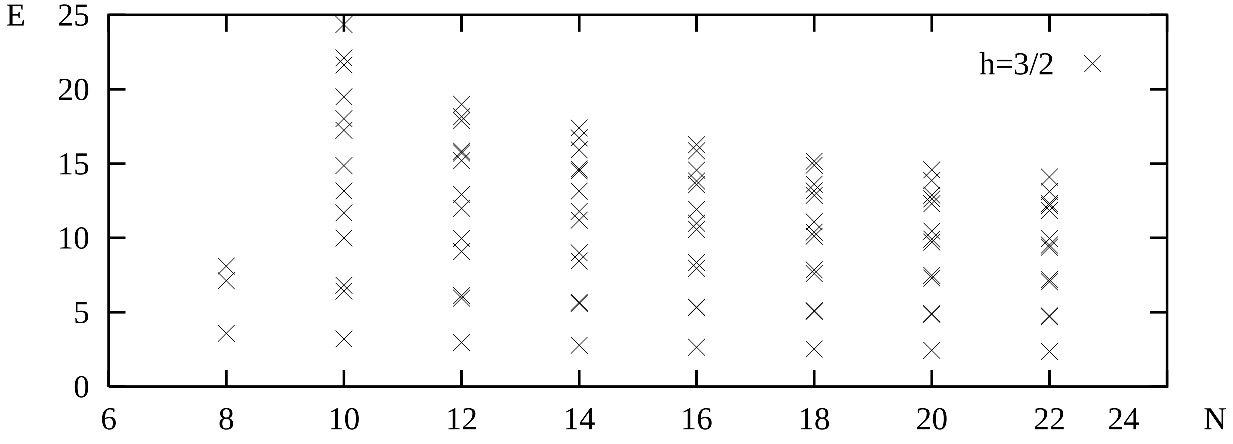
Tabelle 1: Ergebnisse für $c = 7/10$



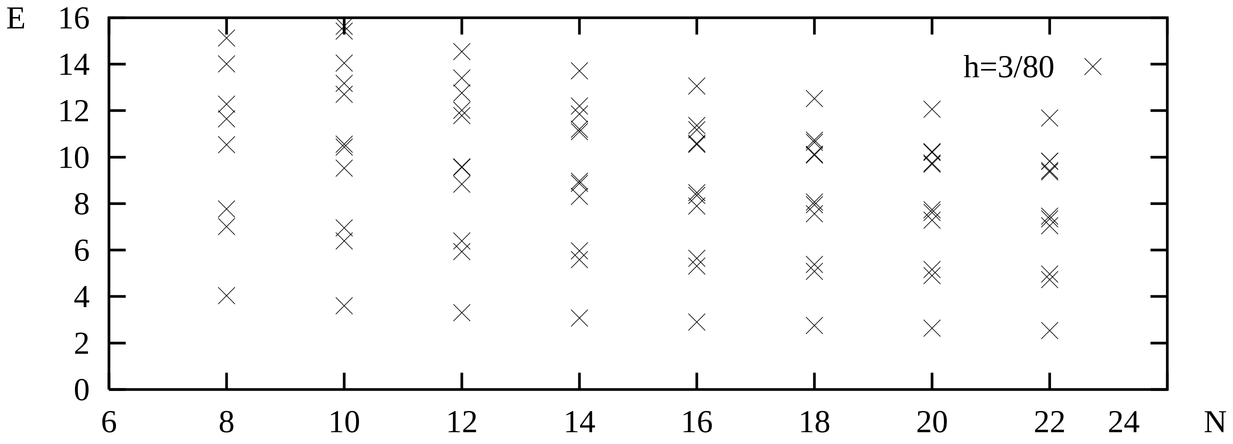
$$\chi_{1,1}^{(4,5)}(q) = 1 + q^2 + q^3 + 2q^4 + 2q^5 + 4q^6 + 4q^7 + 7q^8 \ldots$$



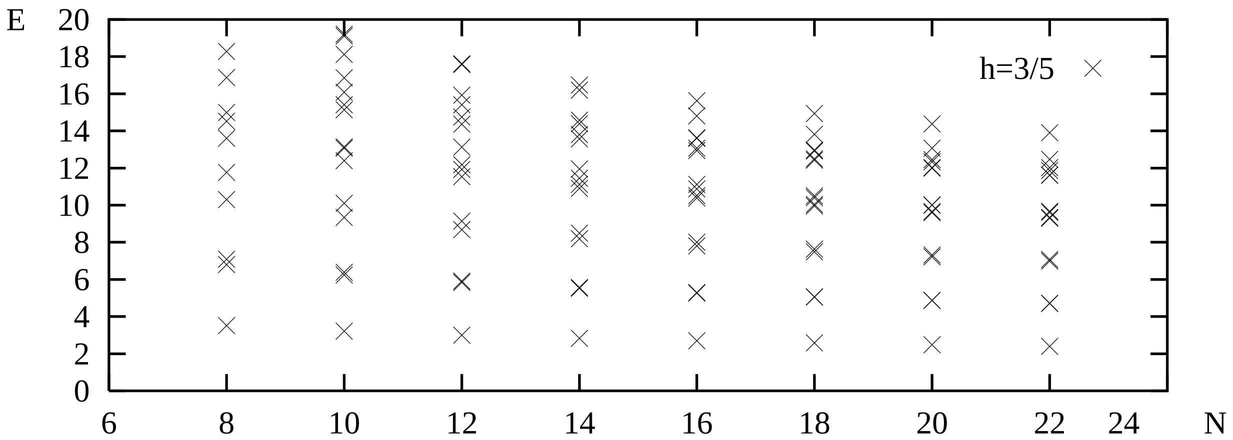
$$\chi_{2,1}^{(4,5)}(q) = q^{7/16}(1 + q + q^2 + 2q^3 + 3q^4 + 4q^5 + 6q^6 + 8q^7 + 10q^8 + \ldots)$$



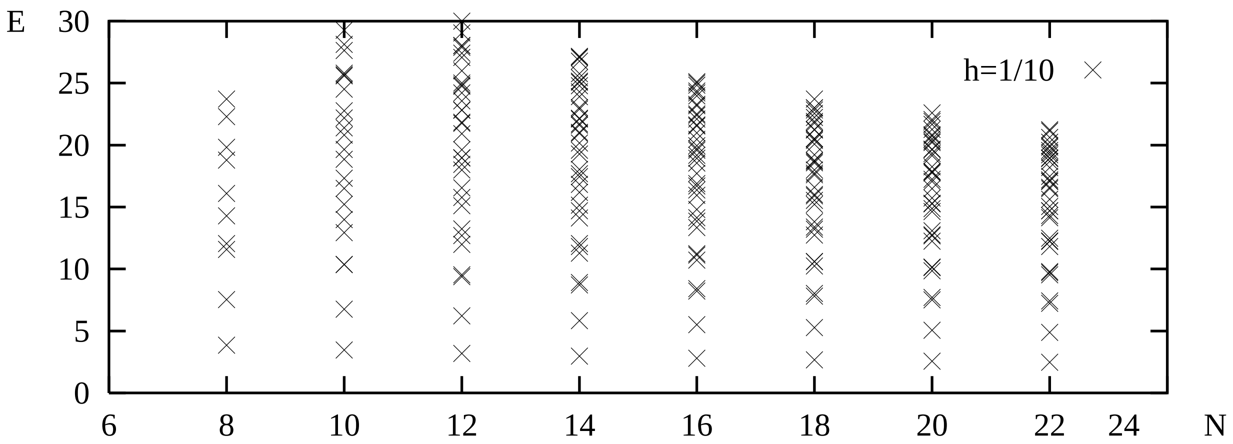
$$\chi_{3,1}^{(4,5)}(q) = q^{3/2}(1 + q + 2q^2 + 2q^3 + 3q^4 + 4q^5 + 6q^6 + 7q^7 + 10q^8 + \ldots)$$



$\chi_{2,2}^{(4,5)}(q) = q^{3/80}(1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + 6q^5 + 8q^6 + 11q^7 + 15q^8 + \ldots)$



$\chi_{3,2}^{(4,5)}(q) = q^{3/5}(1 + q + 2q^2 + 2q^3 + 4q^4 + 5q^5 + 7q^6 + 9q^7 + 13q^8 + \ldots)$



$\chi_{3,3}^{(4,5)}(q) = q^{1/10}(1 + q + q^2 + 2q^3 + 3q^4 + 4q^5 + 6q^6 + 8q^7 + 11q^8 + \ldots)$

4.5 Superauswahlsektor-Struktur

Für die diskrete unitäre Serie der Minimalen Modelle $(p, p+1)$ ergibt sich also die Superauswahlsektorstruktor aus den Randbedingungen auf dem Pfadraum (Anfangsbedingung A_p, Asymptotik A_{p-1}) zu $A_p \otimes A_{p-1}/\mathbb{Z}_2$: Nach den Ergebnissen des vorangegangenen Abschnitts gilt in Analogie zu den Resultaten bei Temperatur Null auch für den kritischen Punkt die

Folgerung (4.23) $H_N^{CTM} = -\sum_{1\leq i\leq N} ie_i$ für ABF-Modelle am kritischen Punkt hat die Eigenschaft

$$\mathrm{ch}_{n,m}^{(p,p+1)}(q) \underset{N\to\infty}{\longleftarrow} \mathrm{Tr}_{\mathcal{P}(A_p,m,\{n,n+1\})} q^{\left(H_N^{CTM}-E_0(N)\right)}, \tag{4.24}$$

wobei ch der Charakter für die entsprechende Darstellung der Virasoro-Algebra ist und $E_0(N)$ die Grundzustandsenergie bei Pfadlänge N. ∎

Die für die ABF-Modelle betrachteten Pfade auf dem A_p-Graphen haben als Anfangswerte einen Vertex von A_p und als Ende zwei benachbarte Vertices, also eine Verbindungslinie des A_p-Graphen, die wiederum Vertex des Verbindungs-Zusammenhangsgraphen A_{p-1} von A_p ist. Die Dimension des Raumes aller im Vertex n beginnenden Pfade der Länge N auf A_p ist

$$dim\ \mathcal{P}(A_p, n, \{1, ..., p\})_N =< \sum_{1\leq i\leq p} \epsilon_i^p, A_p^N \epsilon_n^p > \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} < \sum_{1\leq i\leq p} \epsilon_i^p, S_{A_p} >< S_{A_p}, \epsilon_n^p > \Lambda_{A_p}^N. \tag{4.25}$$

Darin ist $S_{A_p} = S_{A_p}^1$ der in (4.12) definierte Perron-Frobenius-Eigenvektor der A_p-Zusammenhangsmatrix mit Eigenwert $\Lambda_{A_p} = \Lambda_1(A_p)$, $\{\epsilon_j^p\}_{j=1,\ldots,p}$ ist die Standardbasis des $\mathbb{R}^p$ und $< \cdot, \cdot >$ das euklidische Produkt des $\mathbb{R}^p$. Auf dem durch "Telescoping" einfach kontrahierten Bratteli-Diagramm über A_p lassen sich erlaubte Abfolgen der $p-1$ Verbindungslinien von A_p als Pfade auf $1 + A_{p-1}$ beschreiben. Verbindungslinien des ursprünglichen Bratteli-Diagramms werden dabei zu Vertices. Die Dimension des Raumes aller auf der Verbindungslinie der Vertices $m, m+1$ von A_p endenden Pfade der Länge N ergibt sich damit asymptotisch zu

$$< \sum_{1\leq i\leq p-1} \epsilon_i^{p-1}, S_{A_{p-1}} >< S_{A_{p-1}}, \epsilon_m^{p-1} > \left(1 + \Lambda_{A_{p-1}}\right)^{N/2}. \tag{4.26}$$

Korollar (4.27) Im Limes ergibt sich also für die relative Größe eines solchen Pfadraumes im Verhältnis zu dem des Vakuumsektors:

$$\frac{dim\ \mathcal{P}(A_p, n, \{m, m+1\})_N}{dim\ \mathcal{P}(A_p, 1, \{1, 2\})_N} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{< \epsilon_n^p, S_{A_p} >< \epsilon_m^{p-1}, S_{A_{p-1}} >}{< \epsilon_1^p, S_{A_p} >< \epsilon_1^{p-1}, S_{A_{p-1}} >} = \frac{\sin\dfrac{n\pi}{p+1} \sin\dfrac{m\pi}{p}}{\sin\dfrac{\pi}{p+1} \sin\dfrac{\pi}{p}} = d_{n,m}\ ∎$$

Erwartungsgemäß werden also die Quantendimensionen der unitären Minimalen Modelle (2.12) durch die Pfaddarstellung der ABF-Modelle richtig reproduziert.

5. Pfadräume in Minimalen Modellen der CFT

5.1 Realisierung des Energieoperators auf Pfadräumen

Im folgenden wird eine Pfaddarstellung für Minimale Modelle $(2\nu, p')$ der Virasoro-Algebra entwickelt, insbesondere also auch für die unitären Modelle. Für $p = 2\nu$ und $n = \nu$ folgt aus (2.7)

$$\mathrm{ch}_{\nu,m}^{(2\nu,p')}(q) = \prod_{l\geq 1}(1-q^l)^{-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-)^k q^{\frac{\nu p'}{2}k^2+\frac{(2\nu m-p'\nu)}{2}k}$$

und daher vermöge der Jacobischen Tripelproduktidentität

$$\prod_{l\geq 1}(1-v^l)(1+v^{l-\frac{1}{2}}w)(1+v^{l-\frac{1}{2}}w^{-1}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} v^{\frac{1}{2}k^2}w^k$$

mit $v = q^{\nu p'}$ und $w = -q^{\frac{(2m-p')\nu}{2}}$ schließlich die Produktform

$$\mathrm{ch}_{\nu,m}^{(2\nu,p')}(q) = \prod_{l\not\equiv 0,\pm\nu m \mod \nu p', l\geq 1}(1-q^l)^{-1}. \tag{5.1}$$

Daraus erhält man direkt die Faktorisierung

$$\mathrm{ch}_{\nu,1}^{(2\nu,3)}(q)\ \mathrm{ch}_{1,m}^{(2,p')}(q^\nu) = \mathrm{ch}_{\nu,m}^{(2\nu,p')}(q). \tag{5.2}$$

Wegen der Eindeutigkeit des Vorfaktors $q^{-c/24+h}$, durch den die in Produktform gegebenen Charaktere ch Modulfunktionen werden [48], gilt dieselbe Faktorisierungseigenschaft auch für die Modularen Charaktere

$$\chi_{\nu,1}^{(2\nu,3)}(q)\chi_{1,m}^{(2,p')}(q^\nu) = \chi_{\nu,m}^{(2\nu,p')}(q). \tag{5.3}$$

Für die hier betrachteten Sektoren Minimaler Modelle läßt sich in Verallgemeinerung von [49] eine Realisierung auf Pfaden angeben, deren Struktur durch die oben erhaltene Faktorisierung bestimmt ist. Im folgenden wird dies am Beispiel der $(2\nu, p')$-Modelle vorgeführt:

Die summierbaren Folgen $(m_j)_{j\geq 0}$ mit Werten $\{0,\cdots,n-1\}$ und Anfangswert m_0 über einem $\mathcal{C}$-Graph ($\mathcal{C}\in M_n(\{0,1\})$) erzeugen frei den separablen Hilbertraum $\mathcal{P}(\mathcal{C}, m_0, \{0\})$. Auf diesem sei der Endomorphismus

$$L_0^{(h)}(m_j)_{j\geq 0} = (h + \sum_{k\geq 0} k m_k)\ (m_j)_{j\geq 0} \tag{5.4}$$

für $h\in\mathbb{Q}$ definiert, von dem im folgenden zu zeigen ist, daß er der Energieoperator der betrachteten CFT ist. Man beachte die offensichtliche strukturelle Übereinstimmung mit dem die CTM erzeugenden H^{CTM} im vierten Kapitel. Seien weiter $\mathcal{A}_r, \mathcal{B}_r \in M_r(\{0,1\})$ als Zusammenhangsmatrizen des $\mathcal{A}$-Graphen $(\mathcal{A}_r)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i+j\leq r+1 \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$ und des vollständigen Graphen $(\mathcal{B}_r)_{ij} = 1$ definiert. Beim Tensorieren der Graphen hängt die Abzählung der Ecken von der Reihenfolge der Faktoren ab, die in folgender Redefinition klargestellt sei:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}\left(\mathcal{A}_{\frac{p'-1}{2}}\otimes\mathcal{B}_\nu, \nu(\frac{p'-1}{2}-m), \{0\}\right) &= \{(l_j)_{j\geq 0}\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\mid l_j = \nu m_j + n_j,\\ m_0 = \frac{p'-1}{2}-m,\ m_j+m_{j+1} &\leq \frac{p'-1}{2}-1,\ 0\leq m_j,\ 0\leq n_j\leq\nu-1\}.\end{aligned} \tag{5.5}$$

Für die entsprechenden Pfad-Hilberträume werden im folgenden zur Abkürzung die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mathcal{AB}}(p',m,\nu) &:= \mathcal{P}\left(\mathcal{A}_{\frac{p'-1}{2}} \otimes \mathcal{B}_\nu, \nu(\frac{p'-1}{2}-m), \{0\}\right), \\ \mathcal{H}_{\mathcal{A}}(p',m) &:= \mathcal{P}\left(\mathcal{A}_{\frac{p'-1}{2}}, \frac{p'-1}{2}-m, \{0\}\right) \quad \text{und} \\ \mathcal{H}_{\mathcal{B}}(\nu) &:= \mathcal{P}(\mathcal{B}_\nu, 0, \{0\}). \end{aligned} \tag{5.6}$$

verwendet. In der Notation aus (5.5) ergibt sich suggestiv

$$q^{L_0^{(0)}}(l_j) = q^{\sum_i il_i}(l_j) = q^{\sum_i i(\nu m_i + n_i)}(l_j) = q^{\nu \sum_i im_i} q^{\sum_i in_i}(l_j),$$

woraus die folgende Faktorisierungseigenschaft unter der Spur folgt:

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{AB}}(p',m,\nu)}\; q^{L_0^{(0)}} = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{A}}(p',m)}\; q^{\nu L_0^{(0)}}\; \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{B}}(\nu)}\; q^{L_0^{(0)}}. \tag{5.7}$$

Im Raum $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}(\nu)$ liefert die j^{te} Folgenposition in der Folge vermöge ihrer zulässigen Werte $n_j = 0,\cdots,\nu-1$ unter der Spur einen Beitrag von $\sum_{0\le i\le \nu-1} q^{ij} = \frac{1-q^{\nu j}}{1-q^j}$. Mithin ergibt sich vermöge (5.1)

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{B}}(\nu)}\; q^{L_0^{(0)}} = \prod_{i\ge 1}\left(\sum_{j=0}^{\nu-1} q^{ij}\right) = \prod_{k\not\equiv 0,\pm\nu \mod 3\nu} (1-q^k)^{-1} = \mathrm{ch}_{\nu,1}^{(2\nu,3)}(q). \tag{5.8}$$

Für die Folgen über $\mathcal{A}$-Graphen entnimmt man etwa [37][49]

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{A}}(p',m)}\; q^{L_0^{(0)}} = \prod_{k\not\equiv 0,\pm m \mod p'} (1-q^k)^{-1} = \mathrm{ch}_{1,m}^{(2,p')}(q). \tag{5.9}$$

Beweisen läßt sich dies mit Hilfe der im folgenden Abschnitt entwickelten Quasiteilchen-Interpretation der Summenseite der entsprechenden Rogers-Ramanujan-Identität.
Mit den Gleichungen (5.2) und (5.7) ergibt sich also folgendes

Korollar (5.10) Seien 2ν, p' relativ prim und $1 \le m \le \frac{p'-1}{2}$. Dann sind die modularen Charaktere des entsprechenden Sektors des Virasoro-Minimalen Modells

$$\chi_{\nu,m}^{(2\nu,p')}(q) = q^{-\frac{c(2\nu,p')}{24}} \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{AB}}(p',m,\nu)}\; q^{L_0^{(h_{\nu,m}^{(2\nu,p')})}}. \;\blacksquare$$

5.2 Quasiteilchen-Struktur der Pfadräume

Für diese Charaktere sind verallgemeinerte Rogers-Ramanujan-Identitäten anwendbar. Mit den Abkürzungen $(q)_n = \prod_{l=1,\ldots,n}(1-q^l)$, $N_i = \sum_{j=i}^K n_j$, $K = [\frac{\nu p'}{2}] - 1$ und $\gamma_\nu = \begin{cases} 2 & \text{falls } \nu \text{ gerade} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$ ergibt sich nach (5.1) und [50] folgende Identität zwischen Produkt- und Summenseite:

$$\mathrm{ch}_{\nu,m}^{(2\nu,p')}(q) = \prod_{l\not\equiv 0,\pm\nu m \mod \nu p', l\ge 1} (1-q^l)^{-1} = \sum_{n_1,\cdots,n_K\ge 0} \frac{q^{N_1^2+\cdots+N_K^2+N_{\nu m}+\cdots+N_K}}{(q)_{n_1}\cdots(q)_{n_{K-1}}(q^{\gamma_\nu})_{N_K}}, \tag{5.11}$$

Für ungerade ν entsprechen diese Charaktere solchen von (2,ungerade)-Modellen, und es gilt $\sum_j N_j^2 = \mathbf{n}\mathcal{C}_K^{-1}\mathbf{n}$, $\mathcal{C}_K = (2-\mathcal{T}_K)$, wobei wieder $\mathcal{T}_K$ die Inzidenzmatrix des Tadpole-Graphen $A_{2K}/\mathbb{Z}_2$

ist. Allgemein lassen sich aus der Summenseite Dilogarithmen-Identitäten herleiten [18], was im hier vorliegenden Falle in [21] durchgeführt wurde.

Die Summenseite der Rogers-Ramanujan-Identitäten läßt sich interpretieren als Beschreibung der Quasiteilchen-Struktur des entsprechenden statistischen Modells. Für das Dreizustands-Potts-Modell wurde eine solche Interpretation in [51] entwickelt. In [52] wurde dieselbe Bezeichnung in einer allgemeineren Situation verwendet [53]. Als Verallgemeinerung der dortigen $\mathcal{T}_n$-Graphen wird der Begriff des Quasiteilchens in dieser Arbeit als Interpretation der Summationsindizes in den Mehrfachsummen der Rogers-Ramanujan-Identitäten und einer entsprechenden Struktur des Pfadraumes übernommen, auch wenn in dieser allgemeinen Situation die Beziehung zu physikalischen Quasiteilchen des statistischen Modells noch nicht analysiert ist.

Die Produktseite der Rogers-Ramanujan-Identitäten liefert im Sinne von (5.1) stets eine direkte Beschreibung der Restriktionen an den Pfadraum, während die Summenseite als Zustandssumme von K unterschiedlichen Teilchentypen aufgefaßt werden kann, die durch Äquivalenzklassen von Elementarabschnitten (lokalen Mustern) auf den Pfaden dargestellt werden. Ein solches Quasiteilchen wird angeregt durch Verschiebung des entsprechenden Musters nach rechts entlang der Folge, wobei entsprechend den Restriktionen an erlaubte Folgen der Repräsentant innerhalb der Äquivalenzklasse zu wechseln ist. Teilchen unterschiedlicher Typen können unabhängig voneinander angeregt werden. Teilchen eines Typs haben aufgrund der Struktur des annihilierenden Ideals der Virasoro-Algebra [37] Mindestabstand zwei und behalten ihre Reihenfolge bei. Dies mag als verallgemeinertes Pauli-Prinzip betrachtet werden und veranlaßt [52] dazu, die entsprechenden Teilchen als fermionisch zu bezeichnen. Konkret bezeichnet in der Summe (5.11) der Index n_j die Zahl der Quasiteilchen des Typs j, und der kombinatorische Faktor $1/(q)_{n_j}$ erzeugt alle angeregten Zustände dieses Teilchentyps.

Im Grundzustand des Sektors mit $(n_1, \cdots, n_K)$ Teilchen der K Typen sind diese mit nach rechts fallendem Energiegewicht (= Nummer des Teilchentyps) angeordnet, was als Grundzustandsenergie den q-Exponenten in (5.11) ergibt. Das Fehlen einzelner linearer Terme hierin hängt von den Anfangsbedingungen der Pfade ab (Verschiebung von Teilchen hinreichend hohen Energiegewichts nach links im Grundzustand) und bestimmt somit den entsprechenden (chiralen) Sektor der Theorie. Im einfachsten Falle, $\nu = 1$, sind sämtliche $N = \frac{p'-3}{2}$ Quasiteilchen von der Form $(m_l) = (\cdots k, j - k \cdots)$, wobei $j = 1, \cdots, \frac{p'-3}{2}$ das Energiegewicht bzw. die Nummer des Teilchentyps ist und $k = 1, \cdots, j$ die Repäsentanten innerhalb einer Äquivalenzklasse, k zusammen mit der Position also die verschiedenen möglichen Energiekonfigurationen innerhalb eines Typs abzählt. Offensichtlich werden durch Anregung dieser Quasiteilchen aus dem Grundzustand des $(n_1, ..., n_N)$-Teilchen-Sektors alle erlaubten $(n_1, ..., n_N)$-Konfigurationen über dem $\mathcal{A}_{N+1}$-Graphen erreicht, womit vermöge der in (5.11) zitierten verallgemeinerten Rogers-Ramanujan-Identität (für $\nu = 1$) die Gleichung (5.9) bewiesen ist.

In der allgemeinen Situation gibt es $N := \frac{p'-1}{2}\nu - 1$ — die Zahl der erlaubten positiven Werte auf dem Pfad — Quasiteilchen von dieser einfachen Form $(\cdots k, j - k \cdots)$ $(j = 1, \cdots, N)$, sowie $K - N = \left[\frac{\nu}{2}\right]$ weitere von komplizierterer Struktur. Insbesondere im Falle $\nu = 2$ gibt es genau einen zusätzlichen Quasiteilchentyp, der von der Form $(\cdots N - k, 1 + k \cdots)$ ist, wobei entsprechend den durch die Inzidenzmatrix gegebenen Restriktionen an den Pfadraum k nur die geraden Werte $k = 0, 2, \cdots, N-1$ annehmen kann. Mithin können Teilchen dieses Typs nur in Energieschritten von zwei angeregt werden, was den Exponenten $\gamma_\nu = 2$ in der K^{ten} q-Klammer der Gleichung (5.11) erklärt.

Die hier beschriebene Form der Anregung von Quasiteilchen kann als Operation von $< L_{-1}, L_0, L_1 > \cong su(1,1)$ auf den Pfaden aufgefaßt werden, die Quasiteilchen also als $su(1,1)$-Invarianten. Darauf basieren die Konstruktionen im sechsten Kapitel.

5.3 W-Fusionsalgebren Minimaler Modelle

Die in (2.7) gefundenen Charaktere sind genau diejenigen, die in der Fusion invariant sind unter dem Einfachen Strom (Simple Current) [54]. Daher sind sie gleichzeitig Charaktere der maximal erweiterten chiralen Algebra $\mathcal{W}(2,\delta)$ mit $\delta = \frac{(\nu-1)(p'-2)}{2}$ und zentraler Ladung $c(2\nu, p')$ [55][56][57]

$$\chi_{\nu,m}^{\mathcal{W}(2,\delta)}(q) = \chi_{\nu,m}^{(2\nu,p')}(q) \qquad \mathrm{ch}_{\nu,m}^{\mathcal{W}(2,\delta)}(q) = \mathrm{ch}_{\nu,m}^{(2\nu,p')}(q). \tag{5.12}$$

Eine Ausnahme bilden die $(2,p')$-Modelle, bei denen kein Einfacher Strom auftritt, bei denen aber sämtliche Charaktere gemäß (5.2) faktorisieren.

Tatsächlich zeigt sich, daß die entsprechende Pfadraumstruktur eng mit der Fusion der $\mathcal{W}$-Algebra zusammenhängt. Das erscheint einerseits naheliegend, da die relative Sektorgröße von der Pfadraumstruktur bestimmt wird, ist andererseits aber insofern überraschend, als nur einige der Sektoren diese Struktur aufweisen, d.h. auf demselben Bratteli-Diagramm definiert werden können.

Ein Zusammenhang zwischen Pfadalgebra und Fusion läßt sich mit Hilfe von in [58] entwickelten Methoden herstellen. Die Observablenalgebra $\mathcal{A}$ einer Algebraischen Quantenfeldtheorie [15] ist eine C^*-Algebra. Die unitären Äquivalenzklassen von Endomorphismen ρ_i der Observablenalgebra, die durch Zurückholen der Vakuumdarstellung (als "Referenzdarstellung") die Superauswahlsektoren liefern, induzieren Gruppenhomomorphismen ρ_{i_*} auf $K_0(\mathcal{A})$. Mithin sind Superauswahlsektor-Struktur und K_0-Gruppenstruktur miteinander verträglich. Kandidaten für $K_0(\mathcal{A})$-Endomorphismen, die die Fusionsstruktur aus der CFT richtig abbilden, müssen insbesondere positiv sein und kommutieren, letzteres, da $\rho_i\rho_j$ und $\rho_j\rho_i$ unitär äquivalent sind. Anstatt die volle C^*-Observablenalgebra zu bestimmen, liegt es nahe, eine der Theorie in natürlicher Weise zugeordnete Algebra zu verwenden, die die Observablenalgebra hinreichend gut approximiert, um schon die richtige Fusion zu liefern. Im folgenden wird daher die einen Teil der Observablenalgebra liefernde Pfadalgebra [11] einer Theorie im Hinblick auf die Fusionsstruktur untersucht. Die so konstruierte Fusion muß natürlich sowohl aufgrund dieser vorab getroffenen Auswahl einer approximierenden Algebra, als auch aufgrund von Eindeutigkeitsproblemen bei der Wahl der Erzeugenden mit auf direkterem Wege gewonnenen Ergebnissen verglichen werden.

Für die $\mathcal{W}$-Sektoren des $(2\nu,p')$-Modells, also Pfadräume über $\mathcal{A}_{\frac{p'-1}{2}} \otimes \mathcal{B}_\nu$, ist also im folgenden in Analogie zu [58] der Fusionsring als maximaler kommutativer Unterring der positiven Endomorphismen der K_0-Gruppe der Pfadalgebra $AF(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$ zu konstruieren. Nicht gezeigt ist bislang, in welchen Fällen dabei jede Wahl von $\mathbb{Z}$-Modul-Erzeugenden dieses Unterrings, die die Fusionsaxiome erfüllen, dieselbe Fusion liefert.

Die endlichen Pfadalgebren $AF(\mathcal{A}_{\frac{p'-1}{2}} \otimes \mathcal{B}_\nu, \alpha\nu)^{(n)} \cong AF(\mathcal{A}_{\frac{p'-1}{2}}, \alpha)^{(n)} \otimes AF(\mathcal{B}_\nu, *)^{(n)}$ haben (elementar nach Konstruktion von K_0 für AF-Algebren als Dimensionsgruppen) faktorisierende K_0-Gruppen $K_0(AF(\mathcal{A}_{\frac{p'-1}{2}} \otimes \mathcal{B}_\nu, \alpha\nu)^{(n)}) \cong K_0(AF(\mathcal{A}_{\frac{p'-1}{2}}, \alpha)^{(n)}) \otimes K_0(AF(\mathcal{B}_\nu, *)^{(n)})$. Letztere Gleichung steht in Übereinstimmung mit dem K_*-Produkt-Theorem von Künneth, da K_1 als Gruppe der Zusammenhangskomponenten der Unitären Gruppe von $M_\infty(\mathcal{A})$ für AF-Algebren $\mathcal{A}$ trivial ist. Das aus dem induktiven System der Pfadalgebra $AF(\mathcal{A}_{\frac{p'-1}{2}} \otimes \mathcal{B}_\nu, \alpha\nu)$ unter Anwendung des Funktors K_0 folgende System von K_0-Gruppen ergibt sich also zu

$$\cdots \xrightarrow{\mathcal{A}_{\frac{p'-1}{2}} \otimes \mathcal{B}_\nu} \mathbb{Z}^{\frac{p'-1}{2}} \otimes \mathbb{Z}^\nu \xrightarrow{\mathcal{A}_{\frac{p'-1}{2}} \otimes \mathcal{B}_\nu} \mathbb{Z}^{\frac{p'-1}{2}} \otimes \mathbb{Z}^\nu \xrightarrow{\mathcal{A}_{\frac{p'-1}{2}} \otimes \mathcal{B}_\nu} \cdots, \tag{5.13}$$

so daß zur Analyse der möglichen Fusionsringe die beiden induktiven Systeme, in die dieses faktorisiert, separat betrachtet werden können.

Der $\mathcal{A}$-Graph hat eine reguläre Inzidenzmatrix, so daß nach (3.15) die K_0-Gruppe des direkten Limes gegeben ist durch $\mathbb{Z}^{\frac{p'-1}{2}}$. Ein maximaler kommutierender Unterring aller positiven K_0-Endomorphismen wird erzeugt durch $p_k(\mathcal{T}_{\frac{p'-1}{2}})$, $k = 0, \cdots, \frac{p'-3}{2}$. Dies sind die Generatoren des Fusionsringes des Virasoro-Minimalen Modells $(2, p')$ [49][59].

Die $\mathcal{B}_\nu$-Inzidenzmatrizen haben offensichtlich Rang 1 und sind daher für $\nu > 1$ nicht regulär, so daß im Unterschied zu den $\mathcal{A}$-Graphen keine Identifikation der K_0-Gruppe des direkten Limes mit den K_0-Gruppen der endlichen C^*-Algebren des induktiven Systems möglich ist. Der Fall $\nu = 2$ ergibt für K_0 der AF-Algebra über dem $\mathcal{B}_2$-Graph nach Lemma (3.20) $K_0(AF(\mathcal{B}_2)) = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ mit der von $\mathbb{R}$ durch Einschränkung übernommenen Ordnung. Die entsprechende AF-Algebra ist die Majorana-Algebra (Cliff$^{\text{ev}}$). In [16] wurde gezeigt, daß diese tatsächlich nach geeignetem Abschluß im wesentlichen die Observablen-Algebra des Ising-Modells liefert – zumindest in diesem Falle ist also ein expliziter Zusammenhang zur Observablenalgebra der Theorie gegeben.

Für die Beschreibung der Fusion wären also Endomorphismen der dyadischen Zahlen $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ zu betrachten, d.h. Elemente von $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ als Multiplikationsoperatoren. Durch die Darstellung der Pfade und Pfadalgebren auf einem direkt aus dem Charakter gewonnenen Bratteli-Diagramm wird jedoch stets ein Repräsentant aus der entsprechenden Äquivalenzklasse von Diagrammen hinsichtlich der Energiegraduierung und damit der Möglichkeit der Extraktion von Quantendimensionen ausgezeichnet. Daher sollte man in der Situation nichtregulärer Einbettungen erwarten können, daß das gesamte induktive System – also das konkrete Bratteli-Diagramm – eine vollständige Beschreibung der Fusion zu liefern vermag, während die K_0-Gruppe der im direkten Limes resultierenden AF-Algebra als von dieser speziellen Filtrierung unabhängige Invariante hierzu in diesem Falle weniger geeignet sein mag. Dementsprechend sind filtrierungserhaltende Endomorphismen des gerichteten Systems zu betrachten, also Familien von Endomorphismen $\{\rho_n\}_n$ mit der Eigenschaft, daß das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\mathcal{B}_2} & K_0(\mathcal{A}^{(n)}) = \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{\mathcal{B}_2} & K_0(\mathcal{A}^{(n+1)}) = \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{\mathcal{B}_2} & \cdots \\ & & \downarrow \rho_n & & \downarrow \rho_{n+1} & & \\ \cdots & \xrightarrow{\mathcal{B}_2} & K_0(\mathcal{A}^{(n)}) = \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{\mathcal{B}_2} & K_0(\mathcal{A}^{(n+1)}) = \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{\mathcal{B}_2} & \cdots \end{array} \tag{5.14}$$

Beschränkt man sich wie in [58] auf stationäre Systeme solcher Endomorphismen, also auf $\rho_n = \rho \; \forall n$, so läßt sich von beliebigen endlichen Approximationen $\mathcal{A}^{(n)}$ der vollen Algebra $\mathcal{A}$ die Fusionsstruktur bereits ablesen. Als Bedingungen an zur Beschreibung der Fusion im obigen Sinne geeignete Endomorphismen ρ: $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ ergibt sich aus der Filtrierungserhaltung das Kommutieren mit $\mathcal{B}_2$ und aus der Positivität die Invarianz des Positivitätskegels $\{x \in \mathbb{Z}_2 \mid \langle x, (1,1) \rangle > 0\}$, worin $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische innere Produkt von $\mathbb{Z}^2$ ist. Ein kommutativer Unterring solcher ρ wird als $\mathbb{Z}$-Modul erzeugt von den beiden Endomorphismen $1_{\mathbb{Z}^2}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, wobei letzterer (das erzeugende Element von $\mathbb{Z}_2$) die einzige mit den Fusionsaxiomen verträgliche Wahl des zweiten Erzeugenden ist. Der resultierende Fusionsring (Ring mit ausgezeichneter Basis) ist also $\mathbb{Z}_2$, die $\mathcal{W}(2, \frac{1}{2})$-Fusion des Ising-Modells.

Für beliebiges ν wird ein maximaler kommutativer Unterring von stationären $K_0(AF(\mathcal{B}_\nu)^{(*)}) = \mathbb{Z}^\nu$-Endomorphismen, die zusätzlich filtrierungserhaltend sind, also mit $\mathcal{B}_\nu$ kommutieren, in entsprechender Weise erzeugt von ω^l, $0 \leq l < \nu$ ($\omega^\nu = id$), wobei ω das Erzeugende der durch zyklische Vertauschungen der Basiselemente gegebenen $\mathbb{Z}_\nu$-Operation auf $\mathbb{Z}^\nu$ ist. In diesem Falle ist die Beziehung zur vollen Observablenalgebra allerdings weniger klar als für das Isingmodell, ebenso wie Eindeutigkeitsfragen noch ungeklärt sind. Doch liegt die Vermutung nahe, daß der $\mathcal{B}_\nu$-Graph zumindest für einige Modelle zu einer $\mathbb{Z}_\nu$-Fusion des entsprechenden Modells führt. Tatsächlich ergibt sich im Falle der $\mathcal{W}(2,3)$ bei $c(5,6) = 4/5$ als Fusionring "(2,5)-Fusion$\otimes\mathbb{Z}_3$" [21], was mit den auf anderem Wege gewonnenen Ergebnissen für den ungetwisteten Sektor dieser bosonischen $\mathcal{W}$-Algebra [60] übereinstimmt. Im allgemeinen muß das Auftreten des $\mathcal{B}_\nu$-Graphen für $\nu > 2$ allerdings lediglich erhebliche Einschränkungen an mögliche Fusionsringe des entsprechenden Modells liefern, nicht aber – wie im Falle $\nu = 2$ – notwendigerweise das Auftreten eines Faktors $\mathbb{Z}_\nu$ in der faktorisierten Fusion implizieren.

Konklusion (5.15) Für $\nu = 2$ sowie für eine nichtleere Menge $\{(\nu, p')\}$ mit $\nu > 2$ werden die Erzeugenden des Fusionsringes von $\mathcal{W}(2,\delta)$, $\delta = \frac{(\nu-1)(p'-2)}{2}$ bei $c(2\nu, p')$ dargestellt durch

$$\phi_{kn} := p_{k-1}\Big(\mathcal{T}_{\frac{p'-1}{2}}\Big) \otimes \omega^{n-1}, \qquad k = 1, \cdots, \frac{p'-1}{2}, \qquad n = 1, \cdots, \nu,$$

wobei ω $\mathbb{Z}_\nu$ erzeugt. ∎

Die resultierende Fusion ist also "$(2,p')$–Fusion $\otimes$ $\mathbb{Z}_\nu$–Fusion". Dieses Ergebnis für $\nu = 2$ stimmt mit dem in [61][56]auf anderem Wege gewonnenen überein. Beispiele sind in [21] angegeben. Im Falle $\nu = 1$, also bei Fehlen eines Einfachen Stroms, ergibt sich einfach die bekannte Virasoro-(2,ungerade)-Fusion.

5.4 Vergleich von Pfaddarstellungen in statistischen Modellen und CFT

Die in Abschnitt 5.1 vorkommenden Graphen $\mathcal{A}_k$ lassen sich durch Polynome im gefalteten Graphen $\mathcal{T}_k = A_{2k}/\mathbb{Z}_2$ mit $(\mathcal{T}_k)_{ij} = \delta_{1i}\delta_{1j} + \delta_{i,j+1} + \delta_{j,i+1}$ (Tadpole-Graph) ausdrücken zu $\mathcal{A}_k = p_{k-1}(\mathcal{T}_k)$. Offensichtlich hat $\mathcal{T}_k$ die Eigenvektoren

$$\left(\sin\frac{\pi k m}{2k+1}, \sin\frac{\pi(k-1)m}{2k+1}, \ldots, \sin\frac{\pi m}{2k+1}\right)$$

mit $m = 1, ..., k$ zum Eigenwert $2\cos\frac{\pi m}{2k+1}$, was für $m = 1$ maximal wird. Weiter folgt

$$||\mathcal{A}_k|| = p_{k-1}\left(2\cos\frac{\pi}{2k+1}\right) = \sin\frac{k\pi}{2k+1}\Big/\sin\frac{\pi}{2k+1}. \tag{5.16}$$

Der $\mathcal{B}_k$-Graph hat den Perron-Frobenius-Eigenvektor $(1, ..., 1)$ zum Eigenwert k. Durch Hinzunahme eines Extrapunktes $*$ läßt sich der $\mathcal{B}_k$-Graph formal zerlegen in $\mathcal{B}_k = \mathcal{U}_k^2$, wobei $(\mathcal{U}_k)_{ij} := \delta_{*i} + \delta_{*j} - 2\delta_{*i}\delta_{*j}$ der Graph des k-Zustands-Pottsmodells ist. Offensichtlich ist $(\sqrt{k}, 1, ..., 1)$ der Perron-Frobenius-Eigenvektor von $\mathcal{U}_k$ zum Eigenwert $\sqrt{k}$. Wegen $||\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}|| = ||\mathcal{A}||\cdot||\mathcal{B}||$ folgt also das

Lemma (5.17) $||\mathcal{A}_k\otimes\mathcal{B}_\nu|| = \nu\,\sin\frac{k\pi}{2k+1}\Big/\sin\frac{\pi}{2k+1}$.

Nach der Temperley-Lieb-Äquivalenz hat ein Modell der TL-Klasse genau dann einen Phasenübergang zweiter Ordnung, wenn dies für das Potts-Modell zum gleichen Index der Fall ist, wenn also der maximale Eigenwert (und damit die Norm) der Zusammenhangsmatrix $\Lambda_{\max} \le 2$ ist [44][20]. Die einzigen Modelle der TL-Klasse mit einer TL-Graph-Darstellung über $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ mit $||\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}|| \le 2$ sind die Virasoro-Minimalen Modelle $(3, 4)$ und $(2, 5)$. Man kann also im allgemeinen nicht erwarten, daß sich über den $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-Graphen ein Modell der TL-Klasse definieren läßt mit den Eigenschaften des zur CFT gehörenden Pasquier- oder BF-Modells, also mit einem Phasenübergang zweiter Ordnung.

Bei der expliziten Konstruktion eines Zusammenhangs zwischen den Darstellungen der statistischen Mechanik und denen der CFT sollten insbesondere die Pfadraumrestriktionen, die – wie in 4.3 auch für das statistische Modell gezeigt wurde – den singulären Vektoren im Virasoro-Verma-Modul (also dem nicht restringierten Graphen A_∞ in den statistischen Modellen bzw. $\mathcal{B}_\infty$ in der CFT) entsprechen, richtig aufeinander abgebildet werden, was aufgrund der unterschiedlichen Graduierungen in den beiden Darstellungstypen nichttrivial ist. Hat man, wie dies im sechsten Kapitel begonnen wird, eine volle Virasoro-Algebra auf den $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-Graphen konstruiert, so ist entsprechend das dortige annihilierende Ideal der Virasoro-Algebra [37] mit dem Radikal der TLJ-Algebra im statistischen Modell zu identifizieren.

5.5 Verallgemeinerungen

In [21] wurden für einige weitere Modelle Produktformen der Charaktere bestimmt. Insbesondere ergibt sich im Falle der Modelle $(3\nu, p')$ unter Verwendung der Watson-Identität [48]

$$\begin{aligned}&\prod_{l\ge 1}(1-u^{2l}v^l)(1-u^{2l-1}v^{l-1})(1-u^{2l-1}v^l)(1-u^{4l-4}v^{2l-1})(1-u^{4l}v^{2l-1})\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(u^{3k^2-2k}v^{(3k^2+k)/2} - u^{3k^2-4k+1}v^{(3k^2-k)/2}\right)\end{aligned}$$

mit $u = q^{\nu m}$ und $v = q^{2\nu(p'-m)}$, $n = \nu$ direkt aus (2.7) die Identität

$$\mathrm{ch}_{\nu,m}^{(3\nu,p')}(q) = \prod_{\substack{l\not\equiv 0,\pm\nu m,\pm 2\nu p',\pm(2p'+m)\nu,\\ \pm 2\nu(p'+m)\mod 4\nu p', l\ge 1}} (1-q^l)^{-1}, \tag{5.18}$$

die schon in [62] vermutet wurde. Dort wurde auch gezeigt, daß die bis jetzt behandelten Fälle $(2\nu, p')$ und $(3\nu, p')$ eine vollständige Liste der Virasoro-Charaktere liefern, die in der Form $\prod_{l\geq 1}(1-q^l)^{n_l}$ faktorisieren mit der Bedingung $n_l \in \{0,-1\}$. In ähnlicher Weise können aber auch $\mathcal{W}$-Algebren-Charaktere faktorisiert werden durch Summation von Virasoro-Charakteren über Orbits des Einfachen Stroms [55][56][57]. Dies sei am Beispiel $\nu = 2\mu$ für $(2\nu, p')$-Modelle gezeigt. Hier liefert (2.7)

$$q^{c/24-h^{(p,p')}_{n,m}}(\chi^{(p,p')}_{n,m}(q) - \chi^{(p,p')}_{p-n,m}(q))\prod_{l\geq 1}(1-q^l) = \sum_{k\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}} q^{pp'k^2}\left(q^{(pm-p'n)k} - q^{(pm+p'n)k+nm}\right),$$

woraus für $p = 4\mu$ und $n = \mu$ unter Verwendung der Jacobischen Tripelproduktidentität folgt

$$q^{c/24-h^{(4\mu,p')}_{\mu,m}}(\chi^{(4\mu,p')}_{\mu,m}(q) - \chi^{(4\mu,p')}_{3\mu,m}(q)) = \prod_{l\geq 1}(1-q^l)^{-1}\prod_{l\equiv 0,\pm 2m \mod p'}(1-q^{\mu l/2}). \tag{5.19}$$

Ist μ ungerade, so ist die entsprechende $\mathcal{W}$-Algebra $\mathcal{W}(2,\delta)$ mit $\delta = \frac{(2\mu-1)(p'-2)}{2}$ fermionisch. Daher ergibt sich der $\mathcal{W}$-Charakter als Summe der Virasoro-Charaktere unter Verwendung des Vorzeichenwechsels im zweiten Summanden in (5.19) bei der Transformation $q^{1/2} \mapsto -q^{1/2}$:

$$\begin{aligned} q^{c/24-h^{(4\mu,p')}_{\mu,m}}\chi^{\mathcal{W}(2,\delta)}_{\mu,m}(q) &= q^{c/24-h^{(4\mu,p')}_{\mu,m}}(\chi^{(4\mu,p')}_{\mu,m}(q) + \chi^{(4\mu,p')}_{3\mu,m}(q)) \\ &= \prod_{l\not\equiv 0,\pm\mu \mod 3\mu}(1-q^l)^{-1}\prod_{l\not\equiv 0,\pm m \mod p'}\left(1-q^{\mu l}\right)^{-1}\prod_{\substack{l\equiv 0,\pm 2m \mod p' \\ l \text{ ungerade}}}\left(1+q^{\frac{\mu}{2}l}\right). \end{aligned}$$

Nach (5.1) läßt sich dies reduzieren auf

$$\mathrm{ch}^{\mathcal{W}(2,\delta)}_{\mu,m}(q) = \mathrm{ch}^{(2\mu,p')}_{\mu,m}(q)\prod_{\substack{l\equiv 0,\pm 2m \mod p' \\ l \text{ ungerade}}}\left(1+q^{\frac{\mu}{2}l}\right). \tag{5.20}$$

Hieraus lassen sich wiederum Mehrfachsummenformen der Charaktere herleiten, die zu Dilogarithmen-Identitäten führen. Ähnliche Produktformen sollte es auch für allgemeinere $\mathcal{W}$-Algebren-Charaktere ebenso geben wie für die noch fehlenden (ungerade,ungerade)-Modelle. Eine Konstruktion im allgemeinen Falle dürfte auch für das Verständnis der entsprechenden Fusionsalgebren von Nutzen sein.

Aus der Produktidentität (5.20) für fermionische $\mathcal{W}$-Charaktere (μ ungerade) läßt sich analog zu (5.10) eine Pfadraumdarstellung entwickeln. Der Energieoperator lautet in diesem Falle

$$L_0^{(h)}(l_j)_{j\geq 0} = (h + \sum_{k\geq 0}\frac{k}{2}l_k)\ (l_j)_{j\geq 0}, \tag{5.21}$$

wobei die Folgen $(l_i)_{i\geq 1}$ den Bedingungen $(l_{2i})_{i\geq 1} \in \mathcal{S}(\mathcal{A}_{\frac{p'-1}{2}} \otimes \mathcal{B}_\mu)$ und $l_i \in \{0,\mu\}$ für i ungerade mit $i \equiv 0, \pm 2m \mod p'$, sowie $l_i = 0$ an den verbleibenden Positionen genügen. Die $\mathcal{W}$-Algebren-Charaktere aus (5.12) sind in dieser Beschreibung enthalten, sofern man zu $(l_i) \to (l_{2i})$ übergeht, die Restriktionen des Graphen $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ also nur auf die geraden Folgenpositionen bezieht und die ungeraden gleich Null setzt. Die zusätzlich gewonnenen Charaktere lassen in dieser Form allerdings keine Projektion von Bratteli-Diagramm-Pfaden auf einen Graphen zu.

6. Zur Virasoro-Algebra auf dem Gitter

Auf den im fünften Kapitel hergeleiteten Pfadräumen Virasoro-Minimaler Modelle werden im folgenden Darstellungen der Virasoro-Algebra im Falle des Ising-Modells bzw. der kleinen konformen Algebra $su(1,1)$ im Falle der $(2,p')$-Modelle hergeleitet. Dabei operieren die L_n durch Verschieben der Quasiteilchen entlang des Pfades, wobei unter $L_{\pm 1}$ die Quasiteilchenzahl invariant ist, während $L_{\pm 2}$ Beiträge enthält, die am Pfadanfang zusätzliche Teilchen einfügen oder einzelne Teilchen annihilieren. Dieser die Quasiteilchenzahl-Erhaltung verletzende Beitrag bestimmt die zentraler Ladung der entsprechenden Virasoro-Algebra. Aufgrund ihrer Multi-Quasiteilchen-Struktur läßt sich für die $(2,p')$-Modelle die $su(1,1)$-Darstellung im wesentlichen auf das Tensorprodukt von in Analogie zum $(2,5)$-Modell gewonnenen Ein-Quasiteilchen-Darstellungen zurückführen.

6.1 Das Ising-Modell

Lemma (6.1) Mit den Endomorphismen von $\mathcal{P}(\mathcal{B}_2, 0, \{0\})$

$$S^i_+(..., 1_i, 0, ...) = (..., 0_i, 1, ...) \qquad S^i_-(..., 0_i, 1, ...) = (..., 1_i, 0, ...) \qquad \text{und Null sonst}$$

und mit

$$K_\infty (l_i)_{i\geq 1} = \left(\sum_{k\geq 0} l_k\right) (l_i)_{i\geq 0}$$

stellen für $h, \gamma \in \mathbb{Q}$

$$L_{-1} = \sum_{n\geq 1} n S^n_-$$

$$L_1 = \sum_{n\geq 1} (n + 1 + 2\gamma + \frac{2h}{K_\infty}) S^n_+$$

$$L_0(l_i) = \left(h + \sum_{n\geq 1} (n+\gamma) l_n\right) (l_i)$$

die Liealgebra $su(1,1)$ dar: $[L_0, L_{\pm 1}] = \pm L_{\pm 1}$ und $[L_{-1}, L_1] = 2L_0$.

Beweis Der erste Kommutator ist trivial, und da K_∞ mit den Schiebeoperatoren $S_\pm$ vertauscht, ist der zweite diagonal. Der Ansatz $f(n) = n^2 + \alpha n + \beta$ für den Koeffizienten des diagonalen Anteils der Wirkung von $L_{-1}L_1$ auf die Eins an der Stelle n gewährleistet, daß durch Obstruktion gegen Schieben einer Eins wegfallende Terme sich kompensieren. Nach Definition des Pfadraumes folgt $f(0) = 0$, also $\beta = 0$. Die Bedingung $[L_{-1}, L_1] = 2L_0$ liefert dann $\alpha = 1 + 2\gamma + \frac{2h}{K_\infty}$ und damit die Behauptung. ∎

Mit den Charakterformeln aus 5.1 und 5.5 folgt das

Korollar (6.2): Mit $\gamma = 0$ und $h = 1/16$ erhält man nach (5.10) eine $su(1,1)$-Darstellung auf dem Ramond-Sektor des Ising-Modells. Mit $\gamma = -1/2$ und $h = 0$ folgt nach (5.20) eine $su(1,1)$-Darstellung des Neveu-Schwarz-Sektors des Ising-Modells, wobei der $h = 0$-Sektor durch die Folgen mit einer geraden Anzahl von Einsen gegeben ist und der $h = 1/2$-Sektor durch die mit einer ungeraden Anzahl. ∎

Satz (6.3) Auf dem Pfadraum $\mathcal{P}(\mathcal{B}_2, 0, \{0\})$ des Neveu-Schwarz-Sektors des Ising-Modells wird mit

$$
\begin{aligned}
T_+^j(..., 1_j, a_{j+1}, 0, ...) &= (-1)^{a_{j+1}} \; (..., 0_j, a_{j+1}, 1, ...) \\
T_-^j(..., 0_j, a_{j+1}, 1, ...) &= (-1)^{a_{j+1}} \; (..., 1_j, a_{j+1}, 0, ...) \\
T_+^0(0, 0, 0, ...) &= (0, 1, 1, ...) \\
T_-^0(0, 1, 1, ...) &= (0, 0, 0, ...)
\end{aligned}
$$

(T sind Null auf den nicht angegebenen Zuständen) vermöge

$$
\begin{aligned}
L_0(l_i) &= \left(\sum_{n\geq 1}(n - \frac{1}{2})l_n\right)(l_i) \\
L_{\pm 1} &= \sum_{n\geq 1} nS_\pm^n \\
L_{\pm 2} &= \sum_{n\geq 0}(n + \frac{1}{2})T_\pm^n
\end{aligned}
$$

eine Darstellung der Virasoro-Algebra mit $c = 1/2$ definiert.

Beweis Die $su(1,1)$-Unteralgebra folgt aus dem vorangegangenen Korollar. Mit demselben Argument wie oben ist $[L_{-2}, L_2]$ diagonal. Der Ansatz $g(n) = n^2 + \alpha n + \beta$ für den Koeffizienten der Wirkung von $L_{-2}L_2$ auf die Eins an der Stelle n bzw. L_2L_{-2} auf die Eins an der Stelle $n+2$ liefert aus dem Verschieben von Einsen rechts der Position $n = 2$ in Pfaden $(a_j)_j \in \mathcal{P}(\mathcal{B}_2, 0, \{0\})$ die Bedingung $4\sum_i a_i(i - \frac{1}{2}) = \sum_i a_i(g(i) - g(i-2))$, also $\alpha = 1$. β ergibt sich aus der Operation von $T_\pm^0$, die den zweiten Summanden in $[L_{-2}, L_2] = 4L_0 + c/2$ festlegt: Da in den Fällen $(0,1,0,...)$ und $(0,0,1,...)$ der Term $-L_2L_{-2}$ auf der vorderen Eins trivial operiert, entfällt in obiger Kommutatorbedingung der erste $-g(i-2)$-Term, wodurch der Kommutator $[L_{-2}, L_2]$ um $g(0) = \beta$ bzw. $g(-1) = \beta$ größer wird, also $\beta = c/2 = 1/4$ gelten muß. Für den Folgenanfang $(0,0,0,...)$ liefert $\frac{1}{4}T_-^0T_+^0$ in $[L_{-2}, L_2]$ ebenfalls den zusätzlichen Diagonalterm $c/2$, und für den Folgenanfang $(0,1,1,...)$ entfällt wie oben einer der beiden $-g(0) = -g(-1) = -1/4$-Terme. Der Kommutator $[L_{\mp 1}, L_{\pm 2}] = \pm 3L_{\pm 1}$ ist auf dem Höchstgewichtsvektor wie für Verschieben generischer Einsen erfüllt. Bei allen hierin auftretenden Obstruktionen gegen das Verschieben einer Eins durch $L_{\mp 1}$ oder $L_{\pm 2}$ wird der entfallende Beitrag im Kommutator, der sich aus zweimaligem Schieben dieser Eins ergibt, gerade kompensiert durch einen Beitrag, in dem die Obstruktion verschoben und übersprungen wird, der sich also aus der Verschiebung zweier benachbarter Einsen durch $[L_{\mp 1}, L_{\pm 2}]$ ergibt. Da im Kompensationsterm die Reihenfolge der Operationen von $L_{\mp 1}$ und $L_{\pm 2}$ gegenüber dem entfallenden Term gerade umgekehrt ist, ist beim Überspringen einer Eins durch die $T_\pm^j$-Operation eine Vorzeichenumkehr erforderlich.

Den Rest der Algebra bekommt man durch Iterieren von $[L_{\pm 1}, L_n] = (n \mp 1)L_{n\pm 1}$. ∎

Versieht man $\mathcal{P}(\mathcal{B}_2, 0, \{0\})$ mit dem Skalarprodukt, in dem verschiedene Pfade orthonormal sind, so folgt aus obiger Konstruktion sofort $L_n^* = L_{-n}$.

6.2 Die kleine konforme Algebra des (2,5)-Modells

Der Vakuumsektor des Virasoro-Minimalen Modells $(2,5)$ ist nach Abschnitt 5.1 dargestellt durch den Pfadraum $\mathcal{P}(\mathcal{A}_2, 1, \{0\})$.

Definition (6.4) $K_j, K_\infty \in \mathrm{End}\,(\mathcal{P}(\mathcal{A}_2, 1, \{0\}))$ mit $j \in \mathbb{N}$ seien die in der Pfadbasis diagonal operierenden Endomorphismen

$$K_j(l_i)_{i\geq 0} = \left(\sum_{1\leq k\leq j+1} l_k\right)(l_i)_{i\geq 0} \qquad K_\infty(l_i)_{i\geq 0} = \left(\sum_{k\geq 1} l_k\right)(l_i)_{i\geq 0}.$$

Weiter seien $S_+^j, S_-^j \in \mathrm{End}\,(\mathcal{P}(\mathcal{A}_2, 1, \{0\}))$ die Schiebeoperatoren

$$S_+^j(..., 1_j, 0, 0, ...) = (..., 0_j, 1, 0, ...) \qquad S_-^j(..., 0, 0_j, 1, ...) = (..., 0, 1_j, 0, ...)$$

und Null sonst.

Satz (6.5) Sei

$$L_{\pm 1}^{[1];j} := \sqrt{(j + K_\infty - K_j + 2)(j - K_j)}S_\pm^j \qquad L_{\pm 1} := \sum_{j\geq 1} L_{\pm 1}^{[1];j}.$$

Dann gilt:

$$[L_0, L_{\pm 1}] = \pm L_{\pm 1} \qquad [L_{-1}, L_1] = 2L_0$$

Beweis Der erste Kommutator folgt nach Definition von $S_\pm^j$. Wegen $[K_n, S_\pm^m] = [K_\infty, S_\pm^m] = 0$ — der erste Kommutator verschwindet nur für $m \neq n+1$, doch ist der verbleibende Fall $m = n+1$ für die $L_{\pm 1}$-Kommutatoren aufgrund der Mindestabstandsbedingung für Einsen in $\mathcal{A}_2$-Pfaden irrelevant — operiert $[L_{-1}, L_1]$ in der natürlichen Pfadbasis diagonal. Der Pfad $v := (..., 0, 1_i, 0, 1_{i+2}, 0, ...)$ wird von S_+^i und S_-^{i+2} annihiliert, also auch von $L_{-1}^{[1];i+1}L_1^{[1];i} - L_1^{[1];i+1}L_{-1}^{[1];i+2}$. Wegen $K_{i+1}v = (K_i+1)v$ ergeben sich beide dadurch in $[L_{-1}, L_1]$ fehlenden Summanden jeweils zu $(i + K_\infty - K_i + 2)(i - K_i)v$ und kompensieren sich damit. Außerdem ist $S_-^1(1, 0, 1, ...) = 0$, und der entsprechende $L_{-1}^{[1];1}$-Koeffizient verschwindet. Der Nachweis des zweiten Kommutators ist damit auf die Situation reduziert, in der keine Obstruktionen gegen Schieben einer 1 bestehen. Auf $v = (...0, 0, 1_n, 0, 0, ...)$ ist der durch Verschieben der 1 an der n^{ten} Stelle erzeugte Anteil von $[L_1, L_{-1}]$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
&\left(L_{-1}^{[1];(n+1)}L_1^{[1];n} - L_1^{[1];(n-1)}L_{-1}^{[1];n}\right)v \\
&= \big((n + K_\infty - K_n + 2)(n - K_n) - (n - 1 + K_\infty - K_{n-1} + 2)(n - 1 - K_{n-1})\big)v \\
&= (1 + K_\infty + 2n - 2K_n)v.
\end{aligned}$$

Mithin folgt insgesamt für Elemente $v = (l_i)_i$ der Pfadbasis

$$[L_{-1}, L_1]v = \sum_{n>1|l_n=1} (1 + K_\infty + 2n - 2K_n)v = 2L_0v + (K_\infty + {K_\infty}^2 - K_\infty(K_\infty+1))v = 2L_0v. \blacksquare$$

Korollar (6.6) Mit dem inneren Produkt $(\cdot,\cdot)$ des Pfadraumes $\mathcal{P}(\mathcal{A}_2, 1, \{0\})$, in dem je zwei verschiedene Pfade orthonormal sind, gilt: $L_{\pm 1}^* = L_{\mp 1}$. ∎

Das oben konstruierte $L_{\pm 1}$ ist eindeutig bestimmt durch die Forderungen nach Lokalität der Operation auf den Folgen, die beiden Kommutatoren, Polynomialität der Koeffizienten in der Position, Symmetrie der Koeffizienten für Vor- und Zurückschieben und der Randbedingung des Vakuumsektors $L_1(1,0,0,0,...) = 0$. Durch Übergang zu einem anderen Skalarprodukt, in dem ebenfalls unterschiedliche Pfade orthogonal sind, aber die Normierung verschoben ist, läßt sich $L_{\pm 1}^* = L_{\mp 1}$ auch erreichen bei Aufspaltung der beiden Linearfaktoren unter der Wurzel auf L_{-1} und L_1. In diesem Falle operieren L_{-1} und L_1 mit ganzzahligen Koeffizienten, die durch die Position der geschobenen Eins – verschoben um die Zahl der Einsen links bzw. rechts davon – gegeben sind. Explizit wird dies einschließlich des erforderlichen Skalarprodukts in Abschnitt 6.3 konstruiert.

Für eine Konstruktion von $L_{\pm 2}$ werden die Koeffizienten zunächst o.B.d.A. ebenfalls symmetrisch angenommen. In diesem Falle hat man für die untersten Zustände bis Energie vier die Abbildungen ($\alpha, \beta \in \mathbb{C}$)

$$\begin{aligned}
&(1,0,0,0,0,0,...) \xmapsto[\cdot\alpha]{L_2} (1,0,1,0,0,0,...) \xmapsto[\cdot\alpha]{L_{-2}} (1,0,0,0,0,0,...) \xmapsto{L_{-2}} 0 \\
&(1,0,1,0,0,0,...) \xmapsto[\cdot\beta]{L_2} (1,0,0,0,1,0,...) \xmapsto[\cdot\beta]{L_{-2}} (1,0,1,0,0,0,...) \\
&(1,0,0,0,1,0,...) \xmapsto[\cdot\sqrt{10}]{L_{-1}} (1,0,0,1,0,0,...) \\
&(1,0,1,0,0,0,...) \xmapsto[\cdot 2]{L_1} (1,0,0,1,0,0,...).
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Wegen

$$[L_0, L_2] = 2L_2 \quad [L_{-1}, L_2] = 3L_1 \quad [L_{-2}, L_2] = 4L_0 + c/2$$

folgt daraus

$$\beta = 3\sqrt{3/5} \qquad c = 2\alpha^2 = -22/5. \tag{6.8}$$

In dem im folgenden Abschnitt 6.3 zu konstruierenden Skalarprodukt, in dem die Koeffizienten von $L_{\pm 1}$ ganzzahlig sind, wird α^2 in das Produkt einer positiven und einer negativen Zahl aufgespalten, und es gilt weiterhin $L_{\pm 2}^* = L_{\mp 2}$.

Der damit bisher konstruierte Teil einer Gitter-Virasoro-Algebra auf $\mathcal{P}(\mathcal{A}_2, 1, \{0\})$ reproduziert also die zentrale Ladung $c = -22/5$ des $(2,5)$-Modells. Außerdem scheint durch die Konstruktion von $L_{\pm 1}$ auch $L_{\pm 2}$ schon eindeutig bestimmt zu sein: Tatsächlich liefert ein allgemeiner Ansatz für $L_{\pm 2}$ auf den untersten Energieniveaus unter Verwendung der Ergebnisse von $L_{\pm 1}$ ein stark überbestimmtes Gleichungssystem mit genau einer Lösung, für die bisher allerdings keine geeignete Parametrisierung oder algebraische Beschreibung gefunden wurde. Die explizite Konstruktion ist komplizierter als im Falle des Ising-Modells, da L_2 nicht mit K_∞ kommutiert, sondern zusätzliche Einsen am Folgenanfang einführt.

Satz (6.9) Sei $h \in \mathbb{Q}$. In $\mathcal{P}(\mathcal{A}_2, 0, \{0\})$ stellen

$$
\begin{aligned}
L_0(l_i) &= \left(h + \sum_{j \geq 0} j l_j\right)(l_i) \\
L_{-1} &= \sum_{j \geq 0} S_-^j \sqrt{(j+1-K_j\Delta)\left(j + (1+K_\infty - K_j)\Delta + \frac{2h}{K_\infty}\right)} \\
L_1 &= \sum_{j \geq 0} \sqrt{(j+1-K_j\Delta)\left(j + (1+K_\infty - K_j)\Delta + \frac{2h}{K_\infty}\right)} S_+^j
\end{aligned}
$$

mit $\Delta = 1$ falls $K_\infty > 1$, $\Delta = 0$ sonst und $S_\pm^0 : (0,0,0,...) \leftrightarrow (0,1,0,0,...)$ die Liealgebra $su(1,1)$ dar. Insbesondere ergibt sich für $h = -1/5$ die kleine konforme Algebra als Unteralgebra der Virasoro-Algebra bei $c = -22/5$.

Beweis Für $K_\infty = 0$ oder 1 liefert in $[L_{-1}, L_1]$ der Übergang zum Höchstgewichtsvektor $(0,0,0,...)$ den Beitrag $2h$. Für größere K_∞ läuft der Beweis analog zu dem für den Vakuumsektor. ∎

Wieder ist $L_{\pm 1}^* = L_{\mp 1}$ in dem Skalarprodukt, in dem alle Pfade orthonormal sind. Durch Umnormieren auf das im folgenden Abschnitt konstruierte Skalarprodukt lassen sich die Koeffizienten aus (6.9) faktorisieren:

$$
\begin{aligned}
L_{-1} &= \sum_{j \geq 0} S_-^j \,(j+1-K_j\Delta) \\
L_1 &= \sum_{j \geq 1} \left(j + (1+K_\infty - K_j)\Delta + \frac{2h}{K_\infty}\right) S_+^j + (1-K_0\Delta)\left((1+K_\infty - K_0)\Delta + \frac{2h}{K_\infty}\right) S_+^0
\end{aligned}
\tag{6.10}
$$

6.3 su(1,1) auf Tensorprodukten von Quasiteilchen-Pfadräumen

In Abschnitt 5.2 war gezeigt worden, daß sich die Pfadräume der dort behandelten Modelle gemäß (5.11) in Quasiteilchen zerlegen lassen, die unabhängig voneinander angeregt werden können. Mithin sind diese Pfadräume $\mathcal{P}$ Tensorprodukte von Quasiteilchen-Pfadräumen $\mathcal{Q}$. Lassen sich alle diese Quasiteilchen in Energieschritten von eins anregen ($\gamma_\nu = 1$), so operiert die kleine konforme Algebra $su(1,1)$ auf ihnen analog zum oben betrachteten Fall $(2,5)$, und die Darstellung auf $\mathcal{P}$ ergibt sich durch Tensorieren der Darstellungen auf Quasiteilchen $\mathcal{Q}$. Dies wird im folgenden für alle $(2,p')$-Modelle durchgeführt, funktioniert aber – wie man (5.11) entnimmt – genauso auch für alle anderen Modelle mit $\gamma_\nu = 1$. Zur Vereinfachung der Schreibweise sei zunächst nur jeweils der Vakuumsektor betrachtet.

Definition (6.11) Es sei $\mathcal{Q}(k) := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid a_0 = 1,\ a_n = 0$ fast immer $, (a_i, a_j \neq 0, i \neq j \Rightarrow |i-j| \geq 2k)\}$ der Pfadraum der Quasiteilchen des Energiegewichts k.

Der hierin verwendete Mindestabstand der Teilchen hinsichtlich der Energiegraduierung entspricht dem in Abschnitt 5.2 erläuterten minimalen Abstand, der etwa im Grundzustand des Teilchen-Sektors realisiert wird.

Definition (6.12) Auf $(a_i)_i \in \mathcal{Q}(n)$ seien folgende Endomorphismen definiert:

$$\begin{aligned}
\tilde{K}_j^{[n]}(a_i)_i &= \left(\sum_{1\leq k\leq j+1} a_k\right)(a_i)_i \\
\tilde{K}_\infty^{[n]}(a_i)_i &= \left(\sum_{k\geq 1} a_k\right)(a_i)_i \\
\tilde{S}_+^{[n];j} &: (...,1_j,0,...) \longmapsto (...,0_j,1,...) \\
\tilde{S}_-^{[n];j} &: (...,0_j,1,...) \longmapsto (...,1_j,0,...).
\end{aligned}$$

Dabei sind die Schiebeoperatoren $S_+^{[n];j}, S_-^{[n];j}$ gleich Null, falls die Bildfolge in $\mathcal{Q}(n)$ verboten ist. Zur Vereinfachung der Schreibweise werden auf dem Tensorprodukt $\bigotimes_{1\leq n\leq N}\mathcal{Q}(n)$ die Operatoren

$$\begin{aligned}
K_j^{[n]} &= \mathrm{id}_{\mathcal{Q}(1)}\otimes\cdots\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{Q}(n-1)}\otimes\tilde{K}_j^{[n]}\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{Q}(n+1)}\otimes\cdots\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{Q}(N)} \\
K_\infty^{[n]} &= \mathrm{id}_{\mathcal{Q}(1)}\otimes\cdots\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{Q}(n-1)}\otimes\tilde{K}_\infty^{[n]}\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{Q}(n+1)}\otimes\cdots\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{Q}(N)} \\
S_+^{[n];j} &= \mathrm{id}_{\mathcal{Q}(1)}\otimes\cdots\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{Q}(n-1)}\otimes\tilde{S}_+^{[n];j}\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{Q}(n+1)}\otimes\cdots\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{Q}(N)} \\
S_-^{[n];j} &= \mathrm{id}_{\mathcal{Q}(1)}\otimes\cdots\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{Q}(n-1)}\otimes\tilde{S}_-^{[n];j}\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{Q}(n+1)}\otimes\cdots\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{Q}(N)}
\end{aligned}$$

und

$$\Xi^{[n]} = 2n\left(1+\sum_{n+1\leq k\leq N} K_\infty^{[k]}\right)$$

eingeführt.

Lemma (6.13) Der Pfadraum des Vakuumsektors des minimalen Modells $(2,2N+3)$ hat die Quasiteilchenzerlegung

$$\mathcal{I}\colon\ \mathcal{P}\left(\mathcal{A}_{N+1},N,\{0\}\right)\xrightarrow{\cong}\bigotimes_{1\leq k\leq N}\mathcal{Q}(k).$$

Beweis Sei $(a_i)_i \in \mathcal{P}$. Für ein Quasiteilchen des Gewichts j an der Stelle k in $(a_i)_i$ sei $P_j^>(k)$ die Zahl der Quasiteilchen von höherem Gewicht rechts von der Position k und $P_j^{<,i}(k)$ die der Quasiteilchen von kleinerem Gewicht $i<j$ links von der Position k. Da bei Anregung von Quasiteilchen mit Energiegewicht $j_> > j_<$ aus dem Grundzustand Konfigurationen $(...,j_>,0,j_<,...)$ über $(...,j_<,(j_>-j_<),j_<,...)$ in $(...,j_<,0,j_>,...)$ übergehen, bildet $\mathcal{I}$ ein Quasiteilchen j an der Stelle k in $(a_i)_i\in\mathcal{P}$ auf eine Eins an der Stelle $jk+2jP_j^>(k)-2\sum_{1\leq i<j} iP_j^{<,i}(k)$ in der Bildfolge $(a_i)_i\in\mathcal{Q}(j)$ ab. Per constructionem ist $\mathcal{I}$ als Abbildung in das Tensorprodukt bijektiv. Die Umkehrabbildung von $\bigotimes\mathcal{Q}$ nach $\mathcal{P}$ regt die Quasiteilchen des Typs k in $\mathcal{P}$ um die durch die Positionen der nichtverschwindenden Folgenglieder $a_i^{(k)}$ in $\mathcal{Q}(k)$ gegebene Zahl von Energieeinheiten aus dem Grundzustand des entsprechenden $(n_1,...,n_N)$-Sektors an. ∎

Theorem (6.14) Mit dem inneren Produkt, in dem je zwei verschiedene Pfade orthonormal sind, stellen auf $\mathcal{P}(\mathcal{A}_{N+1},N,\{0\})$ die Endomorphismen $L_0(l_k)_k=\sum_{j\geq 1} jl_j(l_k)_k$ und

$$L_{\pm 1}=\mathcal{I}^{-1}\circ\sum_{1\leq n\leq N}\sum_{j\geq 1}\sqrt{\left(j-(2n-1)K_j^{[n]}-\Xi^{[n]}+2n\right)\left(j+(2n-1)\left(K_\infty^{[n]}-K_j^{[n]}\right)+\Xi^{[n]}\right)}S_\pm^{[n];j}\circ\mathcal{I}$$

die Lie-Algebra $su(1,1)$ dar, und es gilt $L^*_{\pm 1} = L_{\mp 1}$.

Beweis Per definitionem ist $[L_0, L_{\pm 1}] = \pm L_{\pm 1}$, und da die $K^{[n]}_j, K^{[n]}_\infty, \Xi^{[n]}$ mit $S^{[n];i}_\pm$ in allen in den Kommutatoren auftretenden Kombinationen vertauschen (der Fall $i = j+1$ ist wieder durch den Mindestabstand von Einsen in $\mathcal{Q}(k)$-Pfaden ausgeschlossen), ist $[L_{-1}, L_1]$ in der Pfadbasis diagonal. Im gewählten Skalarprodukt sind die Koeffizienten von L_1 für das Vorschieben $S^{[n];j}_+$ einer Eins an der Stelle j und von L_{-1} für das Zurückschieben $S^{[n];j}_-$ an der Stelle $j+1$ wieder gleich. Durch den Ansatz $f\left(j - (2n-1)K^{[n]}_j\right)$ für das Produkt dieser beiden Koeffizienten reduziert sich der Beweis wie in (6.5) wieder auf die Situation, in der keine Obstruktionen gegen die Verschiebung irgendeiner Eins bestehen. Für $[L_{-1}, L_1] = 2L_0$ muß f ein quadratisches Polynom sein und der j^2-Koeffizient gleich eins:

$$f\left(j - (2n-1)K^{[n]}_j\right) = \left(j - (2n-1)K^{[n]}_j\right)^2 + \alpha\left(j - (2n-1)K^{[n]}_j\right) + \beta$$

(Die Indizes an α, β sind zur besseren Lesbarkeit weggelassen.) Eingesetzt in die Bedingung $2L_0 = [L_{-1}, L_1]$ liefert dies $0 = (1-\alpha)K^{[n]}_\infty + 2(2n-1)\sum_j K^{[n]}_j$ wobei sich die Summe in der Auswertung auf Pfaden $(a_i)_i$ eines Faktors des Tensorprodukts über die Positionen j mit nichtverschwindendem a_j erstreckt. Mithin ist

$$\alpha = 1 + (2n-1)(K^{[n]}_\infty + 1).$$

Im Grundzustand des $(n_1, ..., n_N)$-Teilchen-Sektors stehen links der Quasiteilchen mit Gewicht n alle diejenigen mit größerem Gewicht $n+1, ..., N$. Die Mindestenergie der Teilchen mit Gewicht n ist also $\Xi^{[n]}$. L_{-1} darf das erste Teilchen ($K^{[n]}_j = 1$) im Faktor $\mathcal{Q}(n)$ des Tensorprodukts $\mathcal{P}$ also an der Stelle $\Xi^{[n]}$ nicht weiter nach links schieben:

$$f\left(\Xi^{[n]} - 1 - (2n-1)\cdot 1\right) = 0 \Longleftrightarrow \beta = \left(2n - \Xi^{[n]}\right)\left(\Xi^{[n]} + (2n-1)K^{[n]}_\infty\right)$$

Mithin folgt

$$f\left(j - (2n-1)K^{[n]}_j\right) = \left(j - (2n-1)K^{[n]}_j - \Xi^{[n]} + 2n\right)\left(j + (2n-1)\left(K^{[n]}_\infty - K^{[n]}_j\right) + \Xi^{[n]}\right). \blacksquare$$

Korollar (6.15) Für die übrigen Sektoren $h \neq 0$ verläuft die Konstruktion analog, wobei wie in (6.9) der Koeffizient α des linearen Terms in $(i - K_i)$ durch die Bedingung $[L_{-1}, L_1] = 2L_0$ modifiziert wird und die additive Konstante β durch die veränderte Pfadanfangsbedingung. ∎

Theorem (6.16) Die folgenden Endomorphismen von $\mathcal{P}(\mathcal{A}_{N+1}, N, \{0\})$

$$\begin{aligned}
L^{[n];j}_{-1} &= \mathcal{I}^{-1} \circ \left(j - (2n-1)K^{[n]}_j - \Xi^{[n]} + 2n\right) S^{[n];j}_- \circ \mathcal{I} \\
L^{[n];j}_{1} &= \mathcal{I}^{-1} \circ \left(j + (2n-1)\left(K^{[n]}_\infty - K^{[n]}_j\right) + \Xi^{[n]}\right) S^{[n];j}_+ \circ \mathcal{I} \\
L_{-1} &= \sum_{1 \le n \le N} \sum_{j \ge 1} L^{[n];j}_{-1} \\
L_{1} &= \sum_{1 \le n \le N} \sum_{j \ge 1} L^{[n];j}_{1} \\
L_0 (l_k)_k &= \left(\sum_{j \ge 1} j l_j\right)(l_k)_k
\end{aligned}$$

stellen $su(1,1)$ auf den Pfaden $\mathcal{P}(\mathcal{A}_{N+1}, N, \{0\})$ dar und es gibt ein Inneres Produkt $< \cdot, \cdot >$ auf diesem Pfadraum, so daß $L_{\pm 1}^* = L_{\mp 1}$.

Beweis Die Algebra ist nach dem vorangegangenen Theorem erfüllt, da wegen der Reduktion auf Diagonalelemente von $[L_{-1}, L_1]$ nur das Produkt $f(j - K_j^{[n]})$ der Koeffizienten von $L_{-1}^{[n];j}$ und $L_1^{[n];j}$ an der Stelle j in den Beweis eingeht, und da $L_{-1}^{[n];j}$ das erste Quasiteilchen ($K_j^{[n]} = 1$) im Faktor $\mathcal{Q}(n)$ an der Stelle $j = \Xi^{[n]}$ nicht weiter nach links schiebt. Das innere Produkt läßt sich durch Vorgabe auf dem Grundzustand jedes $(n_1, ..., n_N)$-Quasiteilchen-Sektors konstruieren. Bezeichne dazu $(\cdot, \cdot)$ das innere Produkt auf $\mathcal{P}$, in dem je zwei verschiedene Pfade orthonormal sind. Innerhalb dieses Sektors wird jeder Pfadbasisvektor v vom Grundzustand v_0 aus durch Anwenden von $S_+^{[n];j}$ an geeigneten Stellen j erreicht, d.h. es gibt eine endliche Folge $(j_k)_{1 \leq k \leq l} \subset \mathbb{N}$ und $v_j = \prod_{1 \leq k \leq j} S_+^{[n_k];j_k} v_0$ mit $v = v_l$. Durch Vorgabe von $< v_0, v_0 >$ erhält man für das gesuchte Skalarprodukt

$$< v, v >= \prod_{1 \leq k < l} \frac{(v_k, L_{-1}^{[n_k];j_k} v_{k+1})}{(L_1^{[n_k];j_k} v_k, v_{k+1})} < v_0, v_0 > . \tag{6.17}$$

Da die $L_1^{[n];j}$ auf dem Pfadtensorprodukt lokal operieren, ist diese Konstruktion unabhängig von ihrer durch die Wahl einer Folge $(j_k)_k$ festgelegten Reihenfolge und damit wohldefiniert. Je zwei verschiedene Pfade sind auch bzgl. $< \cdot, \cdot >$ orthogonal. ∎

Insbesondere ist in den $L_{\pm 1}$-Koeffizienten $K_j^{[n]}$ die Zahl der Einsen links von j und $K_\infty^{[n]} - K_j^{[n]}$ die Zahl der Einsen rechts von j.

Bei der Konstruktion des inneren Produkts hat man also zunächst in jedem $(n_1, ..., n_K)$-Quasiteilchen-Sektor die Freiheit in der Festlegung der Pseudonorm $< v_0, v_0 >$ des Grundzustands (insbesondere auch des Vorzeichens). Nach Definition von $L_{\pm 2}$ und damit der vollen Virasoro-Algebra auf den Pfaden ist dagegen das Innere Produkt nach Vorgabe der Norm des Höchstgewichtsvektors $\langle h, h \rangle$ eindeutig bestimmt. Da das Vorzeichen der Norm auf jedem $(n_1, ..., n_K)$-Quasiteilchen-Sektor konstant ist, ließen sich durch Einführen eines geeignet gewichteten Vorzeichens in der Summe (5.11) Signaturcharaktere der entsprechenden Theorien gewinnen. Dazu müßte man allerdings wissen, wie die Operation von L_2 beim Übergang zwischen Teilchen-Sektoren das Vorzeichen der Pseudonorm verändert, was insbesondere bei Energiegewicht größer zwei nichttrivial ist. Leider ist über L_2 in dieser allgemeinen Situation bisher nichts bekannt.

6.4 Virasoro-Algebra und TLJ-Algebra

Im folgenden wird als erster Schritt zu einer Darstellung der Virasoro-Algebra auf der TLJ-Algebra des zugrundeliegenden Graphen der Fall des Ising-Modells betrachtet. Als ABF-Modell ist das Ising-Modell auf dem A_3-Graphen definiert, als CFT auf dem $\mathcal{B}_2$-Graphen. Ein Zusammenhang zwischen diesen beiden Pfadräumen wird hergestellt durch das folgende

Lemma (6.18) J: $\mathcal{P}(\mathcal{B}_2, 0, \{0\}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{P}(A_3, 1, \{1, 2\}) \oplus \mathcal{P}(A_3, 1, \{2, 3\})$.

Beweis Sei $(a_j)_j \in \mathcal{P}(\mathcal{B}_2, 0, \{0\})$. Es gilt $J(a_j) = (1, 2, ...)$, und für $a_n = 1$ ist $J(a_j) = (..., 2 \pm 1, 2_{2n-1}, 2 \mp 1, ...)$, für $a_n = 0$ dagegen $J(a_j) = (..., 2 \pm 1, 2_{2n-1}, 2 \pm 1, ...)$. ∎

Nach (4.22) operiert die TLJ-Algebra auf den Pfaden $\mathcal{P}(A_3, 1, \{m, m+1\})$ durch

$$\begin{aligned} e_j(..., 2 \pm 1, 2_j, 2 \mp 1, ...) &= 0 \\ e_j(..., 2 \pm 1, 2_j, 2 \pm 1, ...) &= (..., 2 \pm 1, 2_j, 2 \pm 1, ...) \\ e_j(..., 2, (2 \pm 1)_j, 2, ...) &= \frac{1}{2}\left((..., 2, 1, 2, ...) + (..., 2, 3, 2, ...)\right). \end{aligned} \tag{6.19}$$

Vermöge des oben konstruierten Isomorphismus J läßt sich diese Operation auf den CFT-Pfadraum $\mathcal{P}(\mathcal{B}_2, 0, \{0\})$ übertragen, $E_j \in \mathrm{End}(\mathcal{P}(\mathcal{B}_2, 0, \{0\}))$ vermöge

$$E_j = J^{-1} e_j J. \tag{6.20}$$

Damit operiert die TLJ-Algebra $< \{E_j\} >$ auf Pfaden $(a_j)_j \in \mathcal{P}(\mathcal{B}_2, 0, \{0\})$ des Neveu-Schwarz-Sektors des Isingmodells durch

$$\begin{aligned} E_{2n-1}(a_j)_j &= (1 - a_n)(a_j)_j \\ (2E_{2n} - 1)(a_j)_j &= (..., a_{n-1}, 1 - a_n, 1 - a_{n+1}, a_{n+2}, ...). \end{aligned} \tag{6.21}$$

In dieser TLJ-Darstellung läßt sich die in (6.3) konstruierte Gitter-Virasoro-Algebra darstellen durch

$$\begin{aligned} L_0 &= \sum_{j \geq 0} (j + \frac{1}{2})(1 - E_{2j+1}) \\ L_1 &= \sum_{j \geq 0} (j + 1) E_{2j+1}(2E_{2j+2} - 1) E_{2j+3} \\ L_{-1} &= \sum_{j \geq 0} (j + 1) E_{2j+3}(2E_{2j+2} - 1) E_{2j+1} \\ L_2 &= \sum_{j \geq 0} (j + \frac{3}{2}) E_{2j+1}(2E_{2j+2} - 1)(2E_{2j+3} - 1)(2E_{2j+4} - 1) E_{2j+5} + \frac{1}{2}(1 - E_1)(2E_2 - 1) E_3 \\ L_{-2} &= \sum_{j \geq 0} (j + \frac{3}{2}) E_{2j+5}(2E_{2j+4} - 1)(2E_{2j+3} - 1)(2E_{2j+2} - 1) E_{2j+1} + \frac{1}{2} E_3(2E_2 - 1)(1 - E_1), \end{aligned} \tag{6.22}$$

wie man unmittelbar der Beschreibung der Schiebeoperatoren $S_\pm, T_\pm$ durch die elementaren Pfadmodifikationen E_j entnimmt. Mit dem Skalarprodukt, in dem alle Pfade orthonormal sind, gilt $E_j^* = E_j$ und damit offensichtlich auch $L_n^* = L_{-n}$. Die so konstruierte Virasoro-Algebra des Neveu-Schwarz-Sektors des Ising-Modells stimmt im wesentlichen mit der über die Fermionen-Algebra mittels Sugawara-Konstruktion gewonnenen [47] überein (vgl. auch [63]).

Nach Abschnitt 6.1 gehören in $\mathcal{P}(\mathcal{B}_2, 0, \{0\})$ die Pfade mit einer geraden Anzahl von Einsen zum Vakuumsektor, die Pfade mit einer ungeraden Anzahl von Einsen dagegen zum $h = 1/2$-Sektor. Mit dem Isomorphismus J der Pfadräume über $\mathcal{B}_2$ und A_3 ergibt sich damit, daß die Pfade auf dem A_3-Graphen mit einer geraden Anzahl von “Diagonalen” $(..., 2 \pm 1, 2, 2 \mp 1, ...)$ zum Vakuumsektor gehören, wegen $a_0 = 1$ also diejenigen mit Asymptotik $\Omega = \{1, 2\}$. Dies stimmt mit der Superauswahlsektor-Struktur (4.24) überein. Insbesondere ist die Diagonalisierung der hier vorliegenden Temperatur-Null-H^{CTM} trivial, da alle in L_0 bzw. H^{CTM} auftretenden TLJ-Erzeugenden e_{2i+1} miteinander kommutieren und überdies in der natürlichen Pfadbasis bereits diagonal sind.

7. Zusammenfassung und Ausblick

Einige Aspekte der Pfadraumstruktur exakt lösbarer statistischer und Minimaler Modelle wurden analysiert. Aus der in den statistischen Modellen vorliegenden Pfadraumstruktur ließ sich die Superauswahlstruktur des zugeordneten Minimalen Modells rekonstruieren, und zwar sowohl bei Temperatur Null, als auch in einer Temperley-Lieb-Darstellung des Erzeugenden der Corner-Transfermatrix bei der kritischen Temperatur.

Die Konstruktion eines Isomorphismus zwischen Darstellungen in statistischen Modellen und Minimalen Modellen, insbesondere eine Darstellung der Virasoro-Algebra durch die TLJ-Algebra des statistischen Modells, wurde für das Ising-Modell angegeben. Für allgemeine Minimale Modelle steht eine solche noch aus. Hilfreich hierfür ist die Konstruktion einer Virasoro-Algebra auf den über Charakteridentitäten gewonnenen Pfadräumen Minimaler Modelle. Mit Hilfe einer Quasiteilchen-Interpretation der Struktur solcher Darstellungsräume konnten erste Schritte in diese Richtung durchgeführt werden, insbesondere die Darstellung der $su(1,1)$-Unteralgebra auf den Pfadräumen.

Die auf den Pfadräumen Minimaler Modelle in natürlicher Weise operierende Pfadalgebra trägt als Approximation der Observablen-Algebra des Modells bzw. der entsprechenden maximalen $\mathcal{W}$-Algebra deren Fusions-Struktur, sofern sie hinreichend groß ist. Diese überträgt sich vermöge des Funktors K-Theorie in die Produktstruktur des Endomorphismenrings der K_0-Gruppe der Pfadalgebra oder – allgemeiner – die Produktstruktur des Rings stationärer filtrierungserhaltender Endomorphismen des durch die Pfadlängen-Graduierung der konkreten Pfadraumrealisierung der Pfadalgebra gegebenen induktiven Systems von K_0-Gruppen zur Pfadalgebra. Nach der Auswahl von Erzeugenden ergibt sich so die $\mathcal{W}$-Fusion, die insbesondere für einfache fermionische $\mathcal{W}$-Algebren mit dem über die S-Matrix gewonnenen Ergebnis übereinstimmt. Ein allgemeines Kriterium dafür, wann im allgemeinen die aus dem Pfadraum eines Superauswahl-Sektors gewonnene AF-Algebra die Observablen-Algebra gut genug approximiert, um schon die volle Fusions-Struktur zu beinhalten, existiert bisher nicht. Hinweise hierzu könnte eine Verallgemeinerung der im fünften Kapitel gewonnenen CFT-Pfadraumdarstellungen auf weitere Sektoren und neue Modelle liefern.

Danksagungen

Herzlich danke ich W. Nahm für die interessante Aufgabenstellung und ständige Diskussionsbereitschaft, ebenso J. Kellendonk und R. Varnhagen für die gute Zusammenarbeit. Für ihre Hilfsbereitschaft und viele anregenden Diskussionen danke ich R. Blumenhagen, W. Eholzer, M. Flohr, A. Honecker, R. Hübel, S. Mallwitz, A. Recknagel und M. Terhoeven. Dem Cusanuswerk danke ich für die vierjährige ideelle und finanzielle Förderung. Mein besonderer Dank gilt meinen Eltern, die mir dieses Studium erst ermöglicht haben.

Literatur

[1] A.A. Belavin, A. M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov, *Infinite Conformal Symmetry of Critical Fluctuations in Two Dimensions,* J. Stat. Phys. Vol. 34, Nos. 5/6 (1984) 763-774

[2] A.A. Belavin, A.M. Polykov, A.B. Zamolodchikov, *Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory,* Nucl. Phys. **B241** (1984) 333-380

[3] J.L. Cardy, *Conformal Invariance and Statistical Mechanics,* pp. 169-245 in E. Brézin, J. Zinn-Justin, eds, Les Houches, Session XLIX, 1988, *Fields, Strings and Critical Phenomena,* Elsevier Science Publishers B.V., 1989

[4] P. Ginsparg, *Applied Conformal Field Theory,* in E. Brézin, J. Zinn-Justin, eds, Les Houches, Session XLIX, 1988, *Fields, Strings and Critical Phenomena,* Elsevier Science Publishers B.V., 1989

[5] L. Alvarez-Gaumé, G. Sierra, C. Gomez, *Topics in Conformal Field Theory,* CERN-TH.5540/89

[6] W. Nahm, *Conformal Field Theory in Two Dimensions,* World Scientific, to appear

[7] G. Segal, *The Definition of Conformal Field Theory,* Oxford 1988

[8] G.E. Andrews, R.J. Baxter, P.J. Forrester, *Eight-Vertex SOS Model and Generalized Rogers-Ramanujan-Type Identities,* J. Stat. Phys. **35** (1984) 193-266

[9] P.J. Forrester, R.J. Baxter, *Further Exact Solutions of the Eight-Vertex SOS Model and Generalizations of the Rogers-Ramanujan Identities,* J. Stat. Phys. **38** (1985) 435-472

[10] V. Pasquier, *Two-Dimensional Critical Systems Labelled by Dynkin Diagrams,* Nucl. Phys. **B285** (1987) 162-172

[11] V. Pasquier, *Operator content of the ADE lattice models,* J. Phys. A: Math. Gen. **20** (1987) 5707-5717

[12] E. Date, M. Jimbo, T. Miwa, M. Okado, *Automorphic properties of local height probabilities for integrable solid-on-solid models,* Phys. Rev. **B 35** (1987) 2105-2107; E. Date, M. Jimbo, A. Kuniba, T. Miwa, M. Okado, *Exactly Solvable SOS Models,* Nucl. Phys. **B290** (1987) 231-273

[13] H. Saleur, M. Bauer, *On Some Relations Between Local Height Probabilities And Conformal Invariance,* Nucl. Phys. **B320** (1989) 591-624

[14] D. A. Huse, *Exact exponents for infinitely many new multicritical points,* Phys. Rev. **B 30** (1984) 3908-3915

[15] R. Haag, D. Kastler, *An algebraic approach to field theory,* J. Math. Phys. **5** (1964) 848; S. Doplicher, R. Haag, J.E. Roberts, *Local observables and particle statistics I,II,* Commun. Math. Phys. **23** (1971) 199 & Commun. Math. Phys. **35** (1974) 49; R. Haag, *Local Quantum Physics,* TMP, Springer Berlin, Heidelberg, 1992

[16] G. Mack, V. Schomerus, *Conformal Field Algebras with Quantum Symmetry from the Theory of Superselection Sectors,* Commun. Math. Phys. **134** (1990) 139-196

[17] A.N. Kirillov, *Identities for the Rogers dilogarithm function connected with simple Lie algebras,* J. Sov. Math. **52** (1989) 2450-2459, (Zap. Nauch. LOMI **164** (1987) 121-133)

[18] W. Nahm, A. Recknagel, M. Terhoeven, *Dilogarithm Identities in Conformal Field Theory,* BONN-HE-92-35, hepth 9211034, to appear in Int. J. Mod. Phys. **A**

[19] E. Witten, *Quantum Field Theory and the Jones Polynomial,* Commun. Math. Phys. **121** (1989) 351-399; M. Atiyah, *The Geometry and Physics of Knots,* Cambridge University Press, Cambridge, 1990

[20] R.J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics,* Academic Press, London, 1982

[21] J. Kellendonk, M. Rösgen, R. Varnhagen, *Path Spaces and W-Fusion in Minimal Models,* BONN-HE-93-04, hepth 9301086, submitted to Int. J. Mod. Phys. **A**

[22] B.L. Feigin, D.B. Fuks, *Invariant Skew-Symmetric Differential Operators on the Line and Verma Modules over the Virasoro Algebra,* Funkt. Anal. Appl. **16** (1982) 114-126; B.L. Feigin, D.B. Fuks, *Verma Modules over the Virasoro Algebra,* Funkt. Anal. Appl. **17** (1983) 241-242

[23] A. Rocha-Caridi, *Vacuum Vector Representations of the Virasoro Algebra,* in *Vertex Operators in Mathematics and Physics,* MSRI Publications # 3 (1984) 451-473, Springer, Heidelberg

[24] J.L. Cardy, *Operator Content of Two-Dimensional Conformally Invariant Theories,* Nucl. Phys. **B270** (1986) 186-204

[25] A. Cappelli, C. Itzykson, J.B. Zuber, *The A-D-E Classification of Minimal and $A_1^{(1)}$ Conformal Invariant Theories,* Commun. Math. Phys. **113** (1987) 1-26; A. Cappelli, C. Itzykson, J.B. Zuber, *Modular Invariant Partition Functions in Two Dimensions,* Nucl. Phys. **B280** (1987) 445-465

[26] W. Nahm, *Lie group exponents and SU(2) current algebra,* Commun. Math. Phys. **118** (1988) 171-176

[27] E. Verlinde, *Fusion Rules and Modular Transformations in 2D Conformal Field Theory,* Nucl. Phys. **B300** (1988) 360-376; G. Moore, N. Seiberg, *Polynomial Equations for Rational Conformal Field Theories,* Phys. Lett. **212B** No. 4 (1988) 451-460

[28] O. Bratteli, D.W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1,* Springer, New York, Berlin, Second Edition 1987; O. Bratteli, D.W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 2,* Springer, New York, Berlin, 1981

[29] D. E. Evans, *C^*-Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Field Theory,* Int. J. Mod. Phys. **B4** (1990) 1069-1118

[30] F.M. Goodman, P. de la Harpe, V.F.R. Jones, *Coxeter Graphs and Towers of Algebras,* MSRI Publications # 14, Springer, New York, 1989

[31] H.N.V. Temperley, E.H. Lieb, *Relations between "percolation" and "colouring" problem and other graph-theoretical problems associated with regular planar lattices: some exact results for the "percolation problem",* Proc. Roy. Soc. London **A 322** (1971) 251-280

[32] V.F.R. Jones, *Index for Subfactors,* Invent. math. **72** (1983) 1-25

[33] G.A. Elliott, *On the Classification of Inductive Limits of Sequences of Semisimple Finite-Dimensional Algebras,* Journal of Algebra **38** (1976) 29-44

[34] E.G. Effros, *Dimensions and C^*-Algebras,* Conference Board Math. Sci. 46, Amer. Math. Soc., Providence R.I. (1981)

[35] B. Blackadar, *K-Theory for Operator Algebras,* MSRI Publications # 5, Springer, New York, 1986

[36] D.E. Evans, J.D. Gould, *Dimension Groups, Embeddings and Presentations of AF-Algebras to Solvable Lattice Models,* Mod. Phys. Lett. **A4,20** (1989) 1883-1890

[37] B. L. Feigin, T. Nakanishi, H. Ooguri, *The annihilating ideals of minimal models,* Int. J. Mod. Phys. **A7** Suppl. **1A** (1992) 217-238

[38] A. Connes, *Non-Commutative Differential Geometry,* Publications Mathématiques IHES 62 (1985) 41-144

[39] M. Atiyah, F. Hirzebruch, *Vector bundles and homogeneous spaces,* Proc. Symp. Pure Math. III, Amer. Math. Soc. (1961) 7-38; M. Atiyah, *K-Theory,* Benjamin, New York, 1967

[40] P. Martin, *Potts Models and Related Problems in Statistical Mechanics,* Series on Advances in Statistical Mechanics, Vol. 5, World Scientific, Singapore, 1991

[41] M.G. Tetel'man, *Lorentz group for two-dimensional integrable lattice systems,* Sov. Phys. JETP **55** (1982) 306-310

[42] A.L. Owczarek, R.J. Baxter, *A Class of Interaction-Round-a-Face Models and Its Equivalence with an Ice-Type Model,* J. Stat. Phys. **49** (1987) 1093-1115

[43] M. Wadati, T. Deguchi, Y. Akutsu, *Exactly Solvable Models and Knot Theory,* Phys. Rep. **180** (1989) 247-332

[44] P.A. Pearce, *Temperley-Lieb Operators and Critical ADE-Models,* Int. J. Mod. Phys. **A4** (1990) 715-734

[45] V. Pasquier, *Ethiology of IRF Models,* Commun. Math. Phys. **118** (1988) 355-364

[46] H. Riggs, *Solvable Lattice Models with Minimal and Nonunitary Critical Behaviour in Two Dimensions,* Nucl. Phys. **B326** (1989) 673-688

[47] H. Saleur, *Virasoro and Temperley Lieb Algebras,* pp. 485-496 in *Knots, Topology and QFT,* Proceedings of the Johns Hopkins Workshop, Florence 1989, ed. L. Lusanna

[48] V. G. Kac, *Infinite dimensional Lie Algebras,* Cambridge University Press, Cambridge, 3rd edition 1990

[49] J. Kellendonk, A. Recknagel, *Virasoro Representations on Fusion Graphs,* Phys. Lett. **298B** (1993) 329-334

[50] D M. Bressoud, *Analytic and combinatorial generalizations of the Rogers-Ramanujan identities,* Memoirs of the Am. Math. Soc. No. 227, Vol. 24 (1980)

[51] R. Kedem, B. McCoy, *Construction of Modular Braching Functions from Bethe's Equations in the 3-State Potts Chain,* ITP-SB-92-56, hepth 9210129

[52] R. Kedem, T. R. Klassen, B. McCoy, E. Melzer, *Fermionic quasiparticle representations for characters of* $G_1^{(1)} \times G_1^{(1)}/G_2^{(1)}$ *,* ITP-SB-92-64, RU-92-51, hepth 9211102; R. Kedem, T. R. Klassen, B. McCoy, E. Melzer, *Fermionic Sum Representations for Conformal Field Theory Characters,* ITP-SB-93-05, RU-93-01, hepth-9301046

[53] M. Terhoeven, *Lift of dilogarithm to partition identities,* BONN-HE-92-36, hepth 9211120

[54] A.N. Schellekens, S. Yankielowicz, *Extended Chiral Algebras and Modular Invariant Partition Functions,* Nucl. Phys. **B327** (1989) 673-703

[55] R. Blumenhagen, M. Flohr, A. Kliem, W. Nahm, A. Recknagel, R. Varnhagen, *$\mathcal{W}$-Algebras with Two and Three Generators,* Nucl. Phys. **B361** (1991) 255-289

[56] R. Varnhagen, *Characters and Representations of New Fermionic $\mathcal{W}$-Algebras,* Phys. Lett. **275B** (1992) 87-92

[57] W. Eholzer, M. Flohr, A. Honecker, R. Hübel, W. Nahm, R. Varnhagen, *Representations of $\mathcal{W}$-Algebras with Two Generators and New Rational Models,* Nucl. Phys. **B383** (1992) 249-288

[58] A. Recknagel, *Fusion Rules from Algebraic K-Theory,* Int. J. Mod. Phys. **A8** (1993) 1345-1357

[59] M. Caselle, G. Ponzano, F. Ravanini, *Towards a classification of fusion rule algebras in rational conformal field theories,* Int. J. Mod. Phys. **B6** (1992) 2075-2090

[60] W. Eholzer, private Mitteilung

[61] W. Eholzer, R. Hübel, *Fusion Algebras of Fermionic Rational Conformal Field Theories via Generalized Verlinde Formula,* BONN-HE-93-05

[62] P. Christe, *Factorized Characters and Form Factors of Descendant Operators in Perturbed Conformal Systems,* Int. J. Mod. Phys. **A6** (1991) 5271-5286

[63] A. Connes, D.E. Evans, *Embeddings of $U(1)$-Current Algebras in Non-Commutative Algebras of Classical Statistical Mechanics,* Commun. Math. Phys. **121** (1989) 507-525