Universität Bonn
Physikalisches Institut
Prof. Dr. H. Kroha, T. Langenbruch
http://www.th.physik.uni-bonn.de/th/Groups/kroha

23.05.2008

Theoretische Festkörperphysik — SS2008

Übungszettel 4

(Abgabe Do 05.06.08, Besprechung Fr 06.06.08)

<u>4.1 Friedel-Oszillationen</u> (6 Punkte)

In einem freien Elektronengas ist die Dichte-Dichte Korrelationsfunktion definiert als

$$\chi(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t, t') = -\langle T\{\rho(\mathbf{x}, t)\rho(\mathbf{x}', t')\}\rangle$$

wobei

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \psi_\sigma^\dagger(\mathbf{x}, t)\psi_\sigma(\mathbf{x}, t)$$

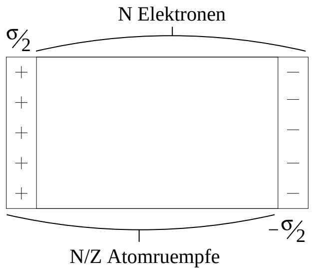
a) Leiten Sie einen Ausdruck für die Dichte-Dichte Korrelationsfunktion in drei Dimensionen im Impuls- und Energieraum her indem Sie die Diagrammtechnik für $T \neq 0$ anwenden. Das Ergebnis nennt man die Lindhard-Funktion $L(\mathbf{q}, \omega)$.

b) Berechnen Sie $L(\mathbf{q}, \omega)$ für den statischen Fall $\omega = 0$ im Grenzfall $T \to 0$.

c) Transformieren Sie $L(\mathbf{q})$ zurück in den Ortsraum. Zeigen Sie dann, dass $\chi(\mathbf{r})$ als Funktion des Abstandes $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ oszilliert. Was ist die Wellenlänge, und mit welchem Potenzgesetz klingen die Oszillationen mit dem Abstand ab.

<u>4.2 Plasmonen</u> (6 Punkte)

a) Klassischer Fall



Wir möchten im Folgenden Oszillationen der Ladungsdichte im Elektronengas untersuchen.

Man kann die Natur solcher Ladungsdichtewellen, die auch als Plasmaoszillationen oder Plasmonen bekannt sind anhand eines sehr einfachen Modells verstehen: Wir behandeln das Elektronengas als starren Körper mit homogener Ladungsdichte. Das Elektronengas wird nun um eine Strecke d gegenüber der fixen, positiv geladenen Anordnung der Atomrümpfe verschoben, wie in der Abbildung skizziert. Die daraus resultierende Oberflächenladung σ erzeugt ein elektrisches Feld, das eine Rückstellkraft auf das Elektronengas ausübt. Dies führt auf die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators. Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und berechnen Sie die Resonanzfrequenz. Diese Frequenz wird Plasmafrequenz genannt.

b) Random Phase Approximation (RPA)

Wir möchten die Ladungsdichtewellen nun auch quantenmechanisch behandeln. In Aufgabe **4.1** hatten Sie ja schon die Dichte-Dichte Korrelationsfunktion $\chi_q^0(\omega)$ für das freie Elektronengas hergeleitet. Die Elektronen sollen jetzt über das Coulomb-Potential

$$V(q) = \frac{4\pi e^2}{q^2}$$

wechselwirken. Es reicht daher nicht mehr aus eine einfache Blase, wie in Aufgabe **4.1**, zu berechnen. Wir benutzen daher die Methode der **RPA**, die wir in der Übung noch ausführlicher besprechen werden, in der eine Kette von Blasen berechnet wird, die man aus der Störungstheorie erhält.
Zeigen Sie, dass die so berechnete Dichte-Dichte Korrelationsfunktion im Grenzfall $q \to 0$ Pole aufweist, die der Plasmafrequenz aus Aufgabenteil **a)** entsprechen. Dieser Grenzfall entspricht hierbei dem Modell aus Aufgabenteil **a)** in dem das Elektronengas als starrer Körper behandelt wurde.