Universität Bonn 20.06.2008
Physikalisches Institut
Prof. Dr. H. Kroha, T. Langenbruch
http://www.th.physik.uni-bonn.de/th/Groups/kroha

Theoretische Festkörperphysik — SS2008

Übungszettel 6

(Abgabe Do 03.07.08)

6.1 Meissner-Effekt

Unter dem Meißner-Effekt versteht man die Eigenschaft von Supraleitern, ein von außen angelegtes magnetisches Feld aus ihrem Inneren zu verdrängen. Wir möchten diese Eigenschaft nun herleiten und koppeln dafür wie folgt ein äußeres elektromagnetisches Feld an die, aus der Vorlesung bekannte, freie Energie des Supraleiters an:

$$\begin{aligned}\Delta F &= N(0)\zeta_0^2 |(\nabla - \frac{i}{\hbar}\frac{2e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x},t))\Delta(\mathbf{x},t)|^2 - N(0)\zeta_0^2 \frac{3}{v_F}|\frac{\partial}{\partial t}\Delta(\mathbf{x},t)|^2 \\ &\quad + B(T)|\Delta(\mathbf{x},t)|^2 + C(T)|\Delta(\mathbf{x},t)|^4 - \frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\end{aligned}$$

mit

$$\zeta_0^2 = \frac{\hbar^2}{4m_e}$$

Wobei

$$F^{\alpha\beta} = (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha)$$

der Feldstärketensor, und

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \Phi(\mathbf{x},t) \\ -\mathbf{A}(\mathbf{x},\mathbf{t}) \end{pmatrix} \qquad A^\alpha = \begin{pmatrix} \Phi(\mathbf{x},t) \\ \mathbf{A}(\mathbf{x},t) \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$x_\alpha = \begin{pmatrix} ct \\ -\mathbf{x} \end{pmatrix} \qquad x^\alpha = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}$$

das 4-er Potential und der 4-er Vektor sind.
Wir möchten jetzt die Ortsabhängigkeit des Vektorpotentials $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ im Inneren des Supraleiters untersuchen und setzen dafür einen zeitlich und räumlich konstanten Ordnungsparameter an:

$$\Delta(\mathbf{x},t) = const = \Delta$$

Wir minimieren nun die freie Energie und benutzen dazu die aus der Elektrodynamik bekannten Euler-Lagrange-Gleichungen (ELG) für ein elektromagnetisches Feld

$$\partial^\beta \frac{\partial \Delta F}{\partial\left(\partial^\beta A^\alpha\right)} = \frac{\partial \Delta F}{\partial (A^\alpha)}$$

wobei über β summiert wird.

a) Betrachten Sie nun den Fall eines zeitunabhängigen elektromagnetischen Feldes und zeigen Sie zunächst, dass:

$$\frac{\partial}{\partial\left(\partial^\beta A^\alpha\right)} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -4F_{\alpha\beta}$$

Wir erinnern uns dafür an einige Rechenregeln für Tensoren und 4-er Vektoren aus der Relativistik:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}F^{\nu\sigma} &= F_\mu^{\ \sigma} \qquad & g_{\mu\nu}x^\nu &= x_\mu \qquad & F_{\nu\sigma}F^{\nu\sigma} &= g_{\lambda\mu}g_{\nu\sigma}F^{\mu\sigma}F^{\lambda\nu} \\ \frac{\partial}{\partial x^\mu}x^\nu \equiv \partial_\mu x^\nu &= \delta_\mu^{\ \nu} \qquad & x_\mu\delta_\nu^{\ \mu} &= x_\nu \qquad & g_{\mu\nu} &= g_{\nu\mu} \qquad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \end{aligned}$$

Über oben und unten auftretende Indizes wird hierbei summiert.

b) Zeigen Sie nun, dass für den ersten Term der freien Energie gilt:

$$\frac{\partial}{\partial\left(\partial^\beta A^\alpha\right)}\left|(\nabla - \frac{i}{\hbar}\frac{2e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x},t))\Delta\right|^2 = \begin{cases} 0 \text{ für } \alpha = 0 \\ -\frac{i}{\hbar}\frac{2\Delta^2 e}{c}\delta_{\alpha\beta} \text{ für } \alpha = 1,2,3 \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial A^\alpha}\left|(\nabla - \frac{i}{\hbar}\frac{2e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x},t))\Delta\right|^2 = \begin{cases} 0 \text{ für } \alpha = 0 \\ -\frac{8\Delta^2 e^2}{\hbar^2 c^2}\mathbf{A}^\alpha(\mathbf{x}) \text{ für } \alpha = 1,2,3 \end{cases}$$

c) Folgern Sie nun für $\alpha = (1,2,3)$ aus den ELG:

$$\frac{4\pi}{c}\mathbf{J} \equiv \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x})) = \nabla(\nabla\mathbf{A}(\mathbf{x})) - \nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\frac{32e^2\Delta^2 N(0)\zeta_0^2\pi}{\hbar^2 c^2}\mathbf{A}(\mathbf{x})$$

In Coulomb-Eichung gilt $(\nabla\mathbf{A}(\mathbf{x})) = 0$, und wir erhalten nach Einsetzen von ζ_0 die folgende Differentialgleichung für $\mathbf{A}(\mathbf{x})$:

$$\nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{4\pi(2e)^2\Delta^2 N(0)}{(2m_e)c^2}\mathbf{A}(\mathbf{x})$$

d) Betrachten Sie nun die x-Komponente dieser Gleichung und nehmen Sie an, dass sich der Supraleiter von $x = 0$ bis $x = \infty$ erstreckt. Lösen Sie die Gleichung unter der Randbedingung $A_x(0) = A_0$ und unter der Annahme, dass $A_x(x)$ normierbar ist, und interpretieren Sie das Ergebnis.