Universität Bonn 14.05.2003
Physikalisches Institut
Prof. Dr. H. Kroha, A. Lubatsch
http://www.th.physik.uni-bonn.de/th/Groups/kroha

Übungen zur Festkörpertheorie II — SS03

2. Übungsblatt

Eigenschaften des Elektronengases

1. Hartree - Fock - Näherung

   Die Elektronen eines Viel–Elektronensystems wechselwirken miteinander über ein Wechselwirkungspotential $v(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ (z. B. abgeschirmtes Coulomb-Potential).

   a) Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator geschrieben werden kann als
   $$H = \sum_{\vec{k}\sigma} [\varepsilon_k - \mu]) c^\dagger_{k\sigma} c_{k\sigma} + \sum_{\vec{k}\vec{k}'\vec{q}\sigma\sigma'} c^\dagger_{\vec{k}+\vec{q}\ \sigma} c^\dagger_{\vec{k}'-\vec{q}\ \sigma'}\ v(\vec{q})\ c_{\vec{k}'\ \sigma'} c_{kq\ \sigma'}$$
   wobei $\varepsilon_k = k^2/2m$ ($\hbar = 1$) und $v(q)$ die Fouriertransformierte des Wechselwirkungspotentials darstellen.

   b) Berechnen Sie die Selbstenergie der Elektronen bei endlicher Temperatur T in erster Ordnung Störungstheorie (Hartree–Fock–Näherung) zunächst für allgemeines $v(q)$ und dann für eine rein lokale Wechselwirkung ($v(q) = V_0 = const.$). Geben Sie die Ein–Teilchen–Greensfunktion an.

2. Friedel–Oszillationen

   a) Berechnen Sie die Dichte–Dichte–Responsefunktion eines freien Elektronengases im Frequenz- und Impulsraum
   $$\chi^{(0)}_{\rho\rho}(\vec{q},\omega) = \sum_{\sigma\sigma'} \big[-i\Theta(t_1 - t_2) \langle\ \Psi^\dagger_\sigma(1)\Psi_\sigma(1)\Psi^\dagger_{\sigma'}(2)\Psi_{\sigma'}(2)\ \big]\rangle_{\vec{q},\omega}$$
   (wobei $1 := (\vec{r}_1, t_1)$ etc.) im statischen Grenzfall ($\omega = 0$) bei Temperatur $T = 0$. Die so erhaltene Funktion heißt Lindhardfunktion $L(q)$. Skizzieren Sie $L(q)$.

   Fouriertranspormieren Sie anschließend das Ergebnis in den Ortsraum: $\chi_{\rho\rho}(\vec{r}, \omega = 0)$. Berechnen Sie $\chi_{\rho\rho}(\vec{r}, \omega = 0)$ auch direkt aus der Einteilchen–Greensfunktion im Ortsraum.

   b) In das nichtwechselwirkende Elektronengas wird am Ort $\vec{r}_0 = 0$ eine Punktladung als Störstelle eingebracht, die das Störpotential $v(r) = e^2/r$ erzeugt. Berechnen Sie mit Hilfe der linearen Response–Theorie die Änderung der Elektronen–Dichteverteilung $\delta\rho(r)$ um die Störstelle.

   (Hinweis: Fouriertransformieren Sie $v(r)$ und rechnen Sie zunächst im Impulsraum.)