

Klausur

12. Juli 2008, 9:00 Uhr bis **12:00** Uhr

Nachname: Vorname:

Matrikelnummer: ECTS Schein: ja nein

BACHELOR: ja nein

Tutor/Gruppe:

Bitte:

- Jede Aufgabe auf einem neuen Blatt beginnen und die Blätter nummerieren.
- Auf jedem Blatt den Namen deutlich angeben.
- Auf diesem Deckblatt jede bearbeitete Aufgabe ankreuzen und angeben, auf welchen Seiten diese bearbeitet wurde.

Aufgabe	Punkte	bearbeitet	auf Seiten	erreichte Punkte
K.1	17	<input type="radio"/>		
K.2	9	<input type="radio"/>		
K.3	20	<input type="radio"/>		
K.4	23	<input type="radio"/>		
K.5	17	<input type="radio"/>		
K.6	21	<input type="radio"/>		
K.7	13	<input type="radio"/>		
gesamt:	120			

Einverständniserklärung zur Veröffentlichung der Matrikelnr. sowie des Klausurergebnisses

Unterschrift:

Nützliche Formeln (nicht alle finden hier Verwendung)

Kugelkoordinaten

$$x = r \sin(\theta) \cos(\phi)$$

$$y = r \sin(\theta) \sin(\phi)$$

$$z = r \cos(\theta)$$

Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad \text{für } \alpha > 0$$
$$\int_0^{\infty} r^n e^{-\alpha r} dr = \frac{n!}{(\alpha)^{n+1}} \quad \text{für } \alpha > 0$$
$$\int \cos(\alpha x) \cos(\beta x) dx = \frac{\sin([\alpha - \beta]x)}{2[\alpha - \beta]} + \frac{\sin([\alpha + \beta]x)}{2[\alpha + \beta]} \quad \text{für } |a| \neq |b|$$
$$\int \cos^2(\alpha x) dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4\alpha} \sin(2\alpha x)$$
$$\int \sin(\alpha x) \sin(\beta x) dx = \frac{\sin([\alpha - \beta]x)}{2[\alpha - \beta]} - \frac{\sin([\alpha + \beta]x)}{2[\alpha + \beta]} \quad \text{für } |a| \neq |b|$$
$$\int \sin^2(\alpha x) dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4\alpha} \sin(2\alpha x)$$
$$\int \sin(\alpha x) \cos(\alpha x) dx = \frac{1}{2\alpha} \sin^2(\alpha x)$$

K 1: *Fragen zur Quantenmechanik*

(1+1+1+3+2+1+1+4+3=17 Punkte)

1. Wie ist der Erwartungswert eines Operators Ω bezüglich des Zustandes $|\psi\rangle$ definiert?
2. Wie lautet die Standardabweichung eines Operators Ω bezüglich des Zustandes $|\psi\rangle$?
3. Welche Bedingung müssen zwei Operatoren A und B erfüllen, damit sie gleichzeitig messbar sind?
4. Welche experimentellen Hinweise für die Quantenmechanik sind Dir bekannt? (Nenne 3 Stück!)
5. Was ist der Unterschied zwischen Fermionen und Bosonen? Verhalten sie sich bei der Besetzung von Zuständen gleich? (Begründe Deine Aussage!)
6. Wie lautet der Drehimpulsoperator in kartesischen Koordinaten?
7. Gib die eindimensionale Schrödingergleichung für eine Wellenfunktion $\psi(x)$ an.
8. Gib explizit die drei Spinoperatoren für ein Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen an! Zeige, dass in der Standarddarstellung der Paulimatrizen $\sigma_k^* = -\sigma_y \sigma_k \sigma_y$ gilt, mit $k = x, y, z$.
9. Für ein kugelsymmetrisches Problem ist es angebracht, die Wellenfunktion, die die Schrödingergleichung löst, zu separieren $\psi(r, \theta, \phi) = \frac{U(r)}{r} F(\theta, \phi)$.
 - (a) Welche Funktionen $F(\theta, \phi)$ lösen den Winkelanteil der Schrödingergleichung in diesem Fall?
 - (b) Schreibe die Schrödingergleichung für $U(r)$ für das Wasserstoffatom auf! Was sind die erlaubten Energien? (Mit Entartung aber ohne Spin.)

K 2: *Wellenfunktion im Ortsraum*

(3+3+3=9 Punkte)

Betrachte ein nichtrelativistisches freies Teilchen der Masse m in einer Raumdimension mit der Wellenfunktion

$$\langle x|\psi\rangle = \psi(x) = A(a^2 - x^2), \quad (1)$$

für $|x| \leq a$ und $\psi(x) = 0$ sonst.

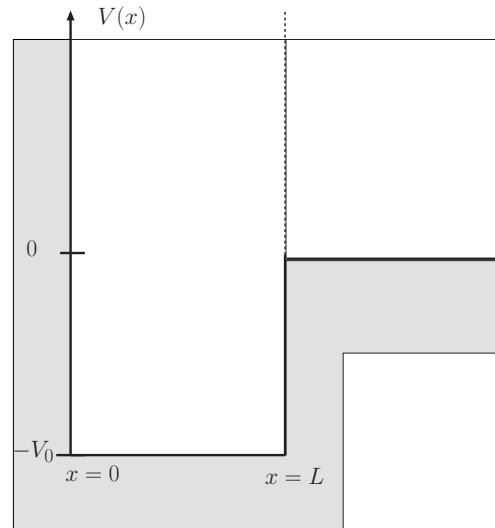
1. Bestimme A aus der Normierungsbedingung $\langle \psi|\psi\rangle = 1$.
2. Was ist der Erwartungswert des Impulses des Teilchens in diesem Zustand?
3. Was ist der Erwartungswert der Energie des Teilchens in diesem Zustand?

K 3: (Unendlich hoher) Potenzialtopf

(3+6+2+4+2+3=20 Punkte)

Betrachte den Potenzialtopf

$$V(x) = \begin{cases} \infty; & x \leq 0 \\ -V_0; & 0 < x < L \\ 0; & x \geq L \end{cases}$$



1. Formuliere die Stetigkeitsbedingungen bei $x = 0$ und $x = L$.
2. Wie lauten die allgemeinen Lösungen in den Bereichen I, II und III? Skizziere, wie man die Normierung der allgemeinen Lösungen mit Hilfe von Teilaufgabe 1. berechnet.
Hinweis: verwende die Abkürzungen $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E + V_0)$ und $\kappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2}|E|$.
3. Durch welche Gleichung sind die Energieeigenwerte für die gebundenen Zustände eines Teilchens der Masse m bestimmt?

Setze nun $V_0 = 0$ und $V(x) = \infty$, für $x \geq L$. Damit gilt auch die Konvention für $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V - E)$

4. Wie lauten nun die Stetigkeitsbedingungen? Gib die auf 1 normierte Eigenfunktion des Potentials an und leite daraus eine Bestimmungsgleichung für die Energie her.
5. Gib die Energie und die Eigenfunktion des Grundzustandes an.
6. Ein Teilchen befinde sich nun im Grundzustand unseres Kastenpotentials. Das Potenzial breite sich plötzlich in $+x$ -Richtung auf das Doppelte seiner Länge aus, wobei die Wellenfunktion nicht gestört wird. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Grundzustand der neuen Box zu finden?

K 4: Harmonischer Oszillator

(2+4+4+4+2+4+3=23 Punkte)

Betrachte die Wellenfunktion des harmonischen Oszillators in der Ortsdarstellung

$$\psi_n(x) = \langle x|n\rangle.$$

Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren lauten allgemein

$$a^\dagger = \frac{\omega m X - i P}{\sqrt{2m\omega\hbar}}, \quad a = \frac{\omega m X + i P}{\sqrt{2m\omega\hbar}}. \quad (2)$$

1. Berechne $[a, a^\dagger]$.
Hinweis: Benutze die bekannte Relation für $[X, P]$.
2. Drücke X und P jeweils durch a und a^\dagger aus. Wie lautet dann der Hamiltonoperator $H(a, a^\dagger)$?

3. Verwende die Ortsdarstellung der Operatoren X und P und drücke dann x und p in a und a^\dagger durch $y = \frac{x}{x_0}$ aus, wobei mit $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{\omega m}}$ die charakteristische Länge bezeichnet wird. Begründe die Substitution $x \rightarrow y$!

4. Bestimme die normierte Lösung des Grundzustandes ψ_0 .

Hinweis: $a\psi_0(y) = 0$.

5. Bestimme nun die übrigen Eigenfunktionen $\psi_n(y)$ durch wiederholtes Anwenden des Erzeugungsoperators a^\dagger auf ψ_0 . Fasse der Einfachheit halber alle auftretenden Vorfaktoren zu einem Gesamtvorfaktor C zusammen. Zeige also

$$\psi_n(y) = C e^{-\frac{y^2}{2}} H_n(y), \quad \text{mit} \quad H_n(y) = e^{\frac{y^2}{2}} \left(y - \frac{d}{dy} \right)^n e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

6. Berechne weiterhin: $\langle n|X^2|n \rangle$ sowie $\langle 2|X^3|1 \rangle$.

Hinweis: hier müssen wieder die Darstellungen aus Gleichung (2) verwendet werden.

7. Zeige, dass $\psi_0(x)$ die Unschärferelation $\Delta X \cdot \Delta P \geq \hbar/2$ erfüllt.

K 5: *Wasserstoffatom und Wellenfunktion*

(4+3+6+4=17 Punkte)

Gegeben seien die unnormierten Wellenfunktionen für das 1-s und 2-s Elektron des Wasserstoffatoms:

$$\psi_{1s}(r, \theta, \varphi) = A e^{-\rho}, \quad \psi_{2s}(r, \theta, \varphi) = B \left(1 - \frac{\rho}{2} \right) e^{-\rho/2}, \quad (3)$$

wobei $\rho = r/a$ mit dem Bohr'schen Radius $a = \frac{\hbar^2}{me^2}$ und den Normierungsfaktoren $A, B \in \mathbb{C}$.

1. Normiere die beiden Wellenfunktionen zu 1.

2. Zeige, dass die beiden Wellenfunktionen orthogonal zueinander sind.

3. Berechne die Erwartungswerte $\langle r \rangle_{1s}$ sowie $\langle r \rangle_{2s}$. In welchem Zustand ist das Atom "größer"?

4. Skizziere (qualitativ) die Wahrscheinlichkeitsdichte für beide Wellenfunktionen und trage jeweils den Wert bei $\rho = 0$ ein.

K 6: *Drehimpuls und Kugelflächenfunktionen*

(3+4+2+2+10=21 Punkte)

Gegeben seien die zwei Kugelflächenfunktionen

$$Y_1^{\pm 1}(\theta, \phi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi}, \quad Y_1^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta. \quad (4)$$

1. Drücke die beiden Kugelflächenfunktionen mit Hilfe des Kugelkoordinaten x, y, z und r aus, d.h. $Y = Y(r, x, y, z)$ mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

2. Betrachte ein Teilchen mit folgender Wellenfunktion

$$\psi = N(\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 2z)e^{-\alpha r}. \quad (5)$$

Ersetze hier x, y, z durch die Kugelflächenfunktionen aus der Teilaufgabe 1. .

3. Normiere die neue Wellenfunktion zu 1.

4. Wie lautet explizit der Operator L_z in Kugelkoordinaten.

5. Berechne die Wahrscheinlichkeiten

$$P(l_z = 0), \quad P(l_z = +\hbar), \quad P(l_z = -\hbar). \quad (6)$$

K 7: *Sequenzielles Stern-Gerlach-Experiment*

(6+1+2+4=13 Punkte)

Im Folgenden betrachte nur den Spin-Teil der Wellenfunktion, d.h. ignoriere die Abhängigkeit von \vec{r} . Betrachte nun die Abb.1 unten.

Von links kommt ein Strahl von Spin $s = \frac{1}{2}$ Teilchen. Sie sind im Eigenzustand $|s = \frac{1}{2}, +|m_x|\rangle$, d.h. im Zustand Spin-up bzgl. der x -Komponente des Spins, S_x .

1. In der S_z -Basis, wie lauten in Vektorschreibweise im Spinraum die Eigenzustände von S_x, S_y und S_z . Was sind die Eigenwerte?
2. Nach der 1. Stern-Gerlach Apparat wird der $+|m_z|\rangle$ -Strahl blockiert. Was ist die Wahrscheinlichkeit, $-|m_z|\rangle$ zu messen?
(Keine Rechnung, lediglich experimentelles Ergebnis angeben.)
3. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, aus dem $-|m_z|\rangle$ -Strahl nach der 2. Stern-Gerlach Apparat $-|m_y|\rangle$ zu messen?
(Keine Rechnung, lediglich experimentelles Ergebnis angeben.)
4. Welche Komponente überlebt ganz am Ende nach wiederholter Anwendung des Spinoperators S_z : keine, beide oder nur eine? Begründe.

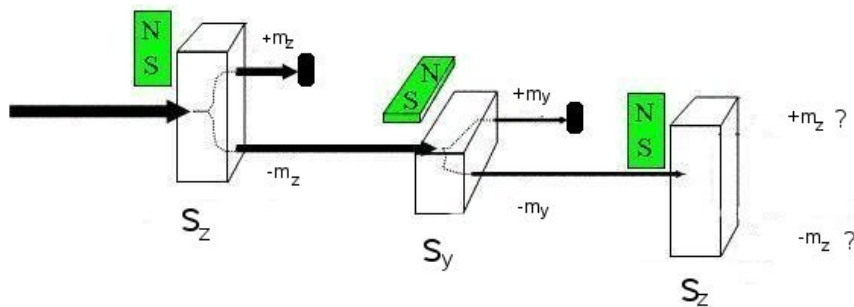


Abbildung 1: Drei hintereinandergeschaltete Stern-Gerlach Apparaturen. Zunächst erfolgt eine Messung entlang der z -Achse und anschließend entlang der y -Achse, wobei jeweils die Spin-up-Komponenten $+m_z$ und $+m_y$ geblockt werden. Die dritte Apparatur misst wieder die Spin-komponenten entlang der z -Achse.