Vorlesung zu Modul physik420 - SS 2008 - Prof. H. Dreiner

Nachklausur

25. September 2008, 9:00 Uhr bis **12:00** Uhr

Nachname: .... Vorname: ....

Matrikelnummer: .... ECTS Schein: ja ◯ nein ◯

BACHELOR: ja ◯ nein ◯

Tutor/Gruppe: ....

Bitte:

- **Vorder- und Rückseiten beachten (einschl. des Deckblatts).**
- **Jede Aufgabe auf einem neuen Blatt beginnen und die Blätter nummerieren.**
- **Auf jedem Blatt den Namen deutlich angeben.**
- **Auf diesem Deckblatt jede bearbeitete Aufgabe ankreuzen und angeben, auf welchen Seiten diese bearbeitet wurde.**

Aufgabe	**Punkte**	**bearbeitet**	**auf Seiten**	**erreichte Punkte**
NK.1	**11**	◯		
NK.2	**11**	◯		
NK.3	**12**	◯		
NK.4	**16**	◯		
NK.5	**30**	◯		
NK.6	**10**	◯		
gesamt:	**90**			

Einverständniserklärung zur Veröffentlichung der Matrikelnr. sowie des Klausurergebnisses

Unterschrift:

Note: gez. Prof. H. Dreiner:

Nützliche Formeln

Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ y &= r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ z &= r\cos(\theta) \end{aligned}$$

Additionstheoreme und trigonometrische Funkionen:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha\pm\beta) &= \sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha\pm\beta) &= \cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)} \\ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)} \\ \sinh(x) &= \frac{e^x-e^{-x}}{2} \\ \cosh(x) &= \frac{e^x+e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

Integrale:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad \text{für} \qquad \alpha>0 \\ \int_0^{\infty} r^n e^{-\alpha r}\mathrm{d}r &= \frac{n!}{(\alpha)^{n+1}} \qquad \text{für} \qquad \alpha>0 \end{aligned}$$

Hermite-Polynome:

$$\begin{aligned} H_0(y) &= 1 \\ H_1(y) &= 2y \\ H_2(y) &= -2\big(1-2y^2\big) \\ H_3(y) &= -12\left(y-\frac{2}{3}y^3\right) \\ H_4(y) &= 12\left(1-4y^2+\frac{4}{3}y^4\right) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(y)H_{n'}(y)\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y &= \delta_{nn'}(\pi^{1/2}2^n n!) \end{aligned}$$

NK 1: *Fragen zur Quantenmechanik* *(1+1+2+2+2+1+2=11 Punkte)*

1. Wie lautet in der Quantenmechanik die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen zur Zeit t am Ort $\mathbf{x}$ im Volumenelement $\mathrm{d}^3\mathrm{x}$ zu finden?
2. Was entspricht den Messgrößen (Observablen) der klassischen Mechanik in der Quantenmechanik?
3. Was passiert bei der Messung der Variablen A an einem Teilchen im Zustand $|\psi\rangle$?
4. Wie erfolgt die Zeitentwicklung eines Zustandes im Hilbertraum? (Bewegungsgleichung explizit ausschreiben!)
5. Was ist qualitativ die Aussage der Bellschen Ungleichung?
6. Gib die Wellenfunktion für ein System N identischer, nichtwechselwirkender Bosonen mit Einteilchenzuständen $|\psi_i\rangle$ explizit an.
7. Wie lautet das Ehrenfestsche Theorem und was ist seine Aussage?

NK 2: *Wasserstoffatom und Wellenfunktion* *(3+4+4=11 Punkte)*

Gegeben seien die unnormierten Wellenfunktionen für das 1-s und 2-p Elektron des Wasserstoffatoms:

$$\psi_{1s}(r,\theta,\varphi) = A\mathrm{e}^{-r/a}, \qquad \psi_{2p}(r,\theta,\varphi) = B\,\frac{r}{a}\,\mathrm{e}^{-r/2a}\cos\theta, \tag{1}$$

mit dem Bohr'schen Radius $a = \frac{\hbar^2}{me^2}$ und den Normierungsfaktoren $A, B \in \mathbb{R}$.

1. Zeige, dass die beiden Wellenfunktionen orthogonal zueinander sind.

   (Hinweis: dies ist unabhängig von der Normierung)
2. Bestimme A und B so dass die beiden Wellenfunktionen zu 1 normiert sind.
3. Berechne die Erwartungswerte $\langle r\rangle_{1s}$ sowie $\langle r\rangle_{2p}$. In welchem Zustand ist das Atom "größer"?

NK 3: *Hermite Polynome* *(5+4+3=12 Punkte)*

Die Hermite-Polynome stellen eine vollständige orthonormale Basis, d. h. jedes Polynom kann durch diese Basis ausgedrückt werden. Für eine Wellenfunktion $\varphi(y)$ gilt:

$$\varphi(y) = \alpha(a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3)\mathrm{e}^{-y^2/2} = \alpha\sum_{n=0}^{4} b_n H_n(y)\mathrm{e}^{-y^2/2} \tag{2}$$

wobei α die Normierung ist.

1. Benutze die Darstellung der Hermite-Polynome (Formelsammlung auf der Rückseite des Deckblatts) um die Koeffizienten b_n zu bestimmen.
2. Gegeben sei die Wellenfunktion

   $$\varphi(y) = \alpha(2 + 3y + 6y + 2y^3)\mathrm{e}^{-y^2/2} \tag{3}$$

   Berechne mit Hilfe von (1) die b_n's und normiere die Wellenfunktion zu 1.
3. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung von n am Zustand $\varphi(y)$ den Wert $n = 3$ zu messen?

NK 4: *Drehimpuls* *(7+3+3+3=16 Punkte)*

In der Standardbasis der kartesischen Koordinaten sei der Drehimpulsoperator gegeben durch $J_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} x_j p_k$ mit $i, j, k \in \{x, y, z\}$ (was auch im weiteren Verlauf der Aufgabe angenommen wird). Desweiteren kann man folgende Operatoren definieren:

$$J_\pm = J_x \pm \mathrm{i} J_y, \qquad \boldsymbol{J^2} = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 \tag{4}$$

und es gilt $[J_i, J_j] = \sum_{j,k} i\hbar \varepsilon_{ijk} J_k$.

1. Zeige folgende Relation:
   - i.) $[J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm$
   - ii.) $[\boldsymbol{J^2}, J_i] = 0, \qquad i \in \{x, y, z\}$
   - iii.) $\boldsymbol{J}^2 = J_- J_+ + \hbar J_z + J_z^2$
2. Seien $|j, m\rangle$ Eigenfunktionen zu J^2 und zu J_z.
   - (a) Was sind die Eigenwerte von $J^2|j, m\rangle$?
   - (b) Wie lauten die Eigenwerte von $J_z|j, m\rangle$?
   - (c) Was erfüllt m bezüglich j?
3. Nennen wir J_+ "Aufsteigeoperator" des Eigenzustandes $|j, m\rangle$; zeige:
   $$J_+|j, m\rangle = C_+(j, m)|j, m + 1\rangle, \tag{5}$$
   mit einer Konstanten C_+.
4. Zeige nun, dass $C_+(j, m)$ bestimmt werden kann zu:
   $$C_+(j, m) = \hbar\sqrt{j(j + 1) - m(m + 1)}. \tag{6}$$

NK 5: *Paulimatrizen, Rotation von Spinoren und Stern-Gerlach Experiment* *(6+5+8+7+4=30 Punkte)*

1. Drücke die beliebige 2×2 Matrix M, mit den vier (komplexen) Freiheitsgraden $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, durch die Paulimatrizen und die Identität aus:
   $$M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}. \tag{7}$$
2. Berechne $(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma})$, wobei mit $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ Vektoren oder Vektoroperatoren bezeichnet werden, die mit den drei Paulimatrizen $\boldsymbol{\sigma}$ kommutieren.
3. Zeige, dass jede 2×2 Matrix, die mit $\sigma_i \quad \forall i \in 1, \ldots, 3$ kommutiert, ein Vielfaches der Identität ist.
4. Sei $\hat{\mathbf{n}}(\theta, \phi)$ ein Einheitsvektor in Kugelkoordinaten. Überprüfe, dass die Eigenvektoren von $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ durch
   $$|\hat{\mathbf{n}}\,\mathrm{up}\rangle \equiv |\hat{\mathbf{n}}+\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2)e^{-i\phi/2} \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi/2} \end{bmatrix}, \tag{8}$$
   $$|\hat{\mathbf{n}}\,\mathrm{down}\rangle \equiv |\hat{\mathbf{n}}-\rangle = \begin{bmatrix} -\sin(\theta/2)e^{-i\phi/2} \\ \cos(\theta/2)e^{i\phi/2} \end{bmatrix} \tag{9}$$
   gegeben sind.

5. Ein Strahl von Spin-1/2 Teilchen, die sich entlang der y-Achse bewegen, trifft auf zwei hintereinandergeschaltete Stern-Gerlach-Apparaturen. Das **B**-Feld der ersten verlaufe entlang der z-Richtung und das der zweiten entlang der z'-Achse, die in der x-z-Ebene in einem Winkel θ relativ zur z-Achse liegt. Beide Apparaturen lassen lediglich die Spin-up Komponente des Strahls durch. Welcher Anteil von Teilchen, die die erste Apparatur passieren, verlässt auch die zweite Apparatur?

<u>NK 6:</u> *Bedingung für die Existenz eines gebunden Zustands* *(3+3+4=10 Punkte)*

Ein nichtrelativistisches Teilchen der Masse m bewegt sich in einer Raumdimension. Im Bereich mit $x > 0$ herrscht ein attraktives δ-Funktionspotenzial $V(x) = -V_0 a\delta(x-a)$, mit $V_0, a > 0 \in \mathbb{R}$. An der Stelle $x = 0$ befindet sich eine undurchdringliche total reflektierende Wand. Für $x \leq 0$ ist demnach V unendlich.

1. Stelle die allgemeine Wellenfunktion für die jeweiligen Bereiche $x \leq 0$, $0 < x < a$ und $x \geq a$ auf.

2. Folgere aus den Anschlussbedingungen bei $x = 0$ und $x = a$ auf die in der vorigen Teilaufgabe verwendeten Vorfaktoren.

   (Hinweis: ein Vorfaktor bleibt unbestimmt - diesen würde man über die Normierungsbedingung an die Wellenfunktion erhalten. Ist hier jedoch NICHT verlangt!)

   Formuliere die Wellenfunktion in Abhängigkeit dieses einen noch unbestimmten Vorfaktors.

3. Leite aus der Unstetigkeitsbedingung der 1. Ableitung folgende Bedingunsgleichung an die Parameter m, V_0 und a her:

$$\kappa = \frac{2maV_0}{\hbar^2}\left(1 + \left\{\begin{array}{c}\coth(\kappa a)\\ \tanh(\kappa a)\end{array}\right\}\right)^{-1} = \sqrt{-\frac{2m}{\hbar^2}E}, \tag{10}$$

   für die antisymmetrische bzw. symmmetrische Lösung mit $E < 0$ und damit $\kappa \in \mathbb{R}$. Ist diese Gleichung erfüllt, existiert ein gebundener ((anti-)symmetrischer) stationärer Zustand.