Übungen zu Theoretische Physik IV

Priv.-Doz. Dr. Stefan Förste

http://www.th.physik.uni-bonn.de/people/forste/exercises/ws1213/tp4

–Anwesenheitsübungen–

A 9.1 Carnot-Prozess

Kreisprozesse sind thermodynamische Prozesse bei denen die Arbeitssubstanz nach einem Durchlauf wieder in den Ausgangszustand zurückkehrt. Nimmt man den Prozess als quasistatisch an und betrachtet geschlossene Systeme, das heißt $\mathrm{d}N = 0$, so kann man den Zustand des Systems zu jedem Zeitpunkt durch genau zwei thermodynamische Variablen beschreiben. Während sämtliche Zustandsgrößen nach einem Durchlauf natürlich konstant bleiben müssen, können $\oint \delta A$ und $\oint \delta Q$ verschieden von Null sein, da δA und δQ keine totalen Differentiale sind. Deshalb kann man Kreisprozesse benutzen um die beiden Energieformen ineinander umzuwandeln.
Eine zentrale Rolle spielt der *Carnot-Prozess*, der aus vier Teilschritten besteht:

1. *Isotherme Expansion*: Die Arbeitssubstanz wird mit einem heißeren Wärmebad der Temperatur T_2 in Kontakt gebracht. Dabei wird dem Wärmebad die Wärmemenge Q_2 entnommen.

2. *Adiabatische Expansion*: Die Arbeitssubstanz wird wärmeisoliert und expandiert adiabatisch. Dabei kühlt sie auf die Temperatur T_1 ab.

3. *Isotherme Kompression*: Die Arbeitssubstanz wird mit einem Wärmebad gleicher Temperatur in Kontakt gebracht und durch Arbeitsleistung von außen komprimiert. Dabei wird die Wärmemenge $|Q_1|$ an das Wärmebad abgegeben.

4. *Adiabatische Kompression*: Die Arbeitssubstanz wird wärmeisoliert und durch Arbeitsleistung von außen komprimiert.

Das T-S-Diagram des Prozesses ist auch in Abbildung 1 dargestellt. Der *Wirkungsgrad* ist definiert als

$$\eta = \frac{W}{Q_2}\,,$$

wobei W die gesamte, nach außen geleistete Arbeit ist. Verwendet man als Arbeitssubstanz ein ideales Gas, so ergibt sich für den Wirkungsgrad des Carnot Prozesses $\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$ und man kann zeigen, dass es keinen Kreisprozess gibt, der diesen Wirkungsgrad übertrifft. In dieser Aufgabe wollen wir nun den Carnot-Prozess mit einem idealen und mit einem Van-der-Waals Gas als Arbeitssubstanz betrachten.

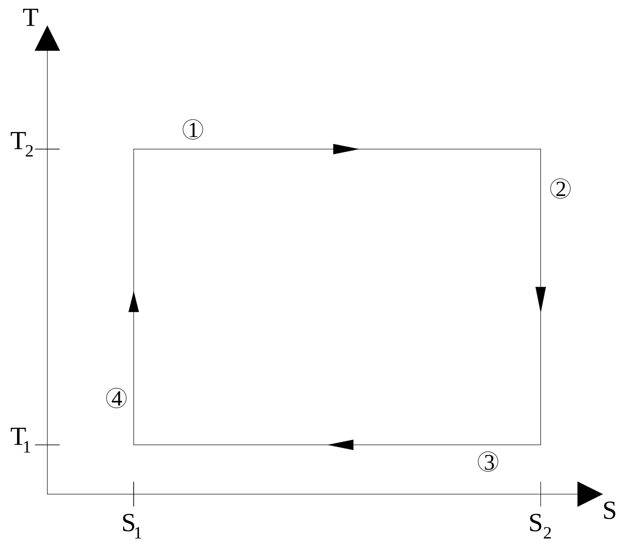

Abbildung 1: Carnot-Kreisprozess im T-S-Diagram.

(a) Berechne den Wirkungsgrad des Carnot-Prozesses wenn ein ideales Gas als Arbeitssubstanz verwendet wird.

(b) Zeige, dass für einen allgemeinen adiabatischen Prozess mit konstanter Teilchenzahl

$$C_V(V,T)\mathrm{d}T = -T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}V$$

gilt.

(c) Benutze das Ergebnis von Aufgabe H 4.1 um die innere Energie U und die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen C_V des Van-der-Waals Gases zu berechnen.

(d) Zeige, dass die Adiabatengleichung in der V-T-Ebene für das Van-der-Waals Gas durch

$$T^{\frac{3}{2}}(V - Nb) = \text{const.}$$

gegeben ist.

(e) Berechne den Wirkungsgrad des Carnot-Prozesses wenn ein Van-der-Waals Gas als Arbeitssubstanz verwendet wird.

–Hausübungen–

H 9.1 Adiabatengleichung *5 Punkte*

Die Energie eines Systems sei gegeben durch

$$E = Ap^2 V \,,$$

wobei A eine konstante ist. Finde die Gleichung der Adiabaten in der p-V-Ebene ($N = \text{const.}$).

H 9.2 Diesel-Zyklus *8 Punkte*

Der Diesel-Zyklus ist in Abbildung 2 im p-V-Diagramm gezeigt. Die vier Schritte sind: adiabatische Komprimierung, isobare Expansion, adiabatische Expansion, isochore Komprimierung. Bestimme Arbeit und Wärmetransfer in jedem Schritt, unter der Annahme, dass das Arbeitsmedium ein ideales Gas ist. Zeige, dass der Wirkungsgrad durch

$$\eta = 1 - \frac{1}{\kappa} \frac{\left(\frac{V_C}{V_A}\right)^\kappa - \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^\kappa}{\frac{V_C}{V_A} - \frac{V_B}{V_A}}$$

gegeben ist, wobei κ der Adiabatenexponent des idealen Gases ist.

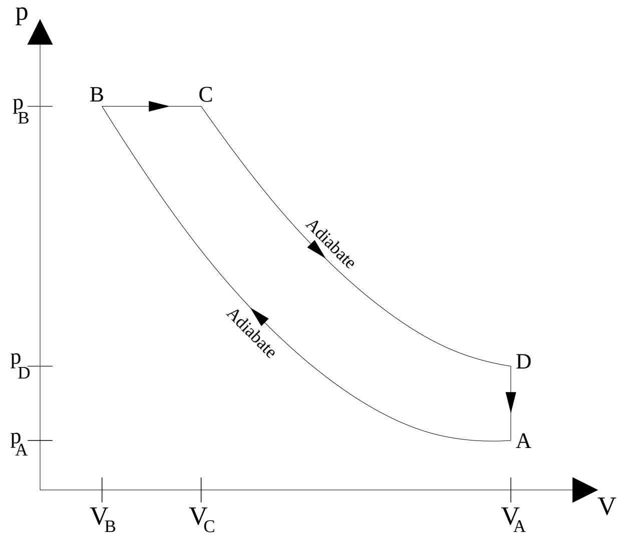

Abbildung 2: Diesel-Zyklus im P-V-Diagram.

H 9.3 Brayton-Joule-Zyklus *7 Punkte*

Der Brayton-Joule-Zyklus ist in Abbildung 3 im S-p-Diagramm gezeigt. Wir nehmen ein ideales Gas als Arbeitsmedium an.

(a) Wie unterscheidet sich dieser Prozess vom Carnot-Prozess?

(b) Berechne für jeden Teilschritt des Zyklus die Arbeit und die Wärmeänderung.
Tipp: Es ist $E = \frac{1}{\kappa - 1} NkT$*, wobei* κ *der Adiabatenexponent ist.*

(c) Zeige, dass der Wirkungsgrad des Brayton-Joule-Zyklus durch

$$\eta = 1 - \left(\frac{p_\mathrm{A}}{p_\mathrm{B}}\right)^{1-\frac{1}{\kappa}}$$

gegeben ist.

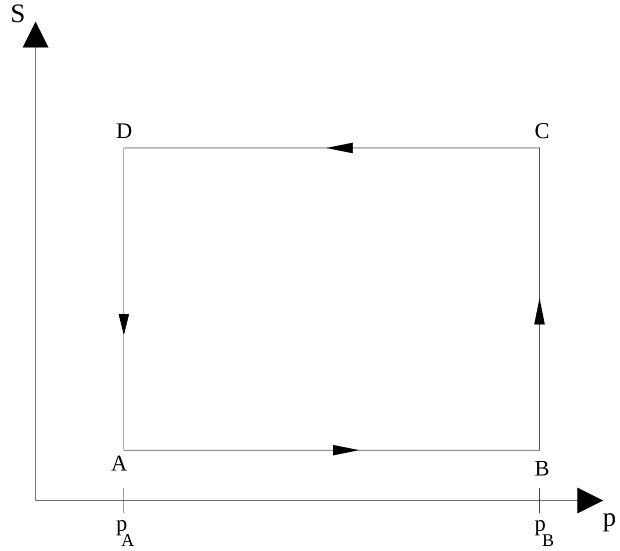

Abbildung 3: Brayton-Joule-Zyklus im S-p-Diagram.