Physikalisches Institut
Universität Bonn
Theoretische Physik

Übungsblatt 11
21. Dezember 2012
WS 12/13

Übungen zu Theoretische Physik IV

Priv.-Doz. Dr. Stefan Förste

http://www.th.physik.uni-bonn.de/people/forste/exercises/ws1213/tp4

Der Weihnachtszettel zählt wie üblich 20 Punkte. Werden mehr als 20 Punkte erreicht sind dies Zusatzpunkte.
Als Lektüre für die Weihnachtszeit ist auch folgender Artikel sehr zu empfehlen:
http://www.nature.com/scientificamerican/journal/v308/n1/full/scientificamerican0113-44.html
Der Autor wird am 14.01.2013 im Bethe Kolloquium um 15c.t. im Seminar Raum 1 des BCTP einen Vortrag zu diesem Artikel halten.

–Hausübungen–

H 11.1 Metalle bei tiefen Temperaturen *(3+4 = 7) Punkte*

Betrachte ein Metall bei nicht vorhandenem Magnetfeld und bei atmosphärischem Druck. Die Wärmekapazität des Metalls im normalleitendem Zustand sei $C_n = \gamma T$ und in der supraleitenden Phase $C_s = \alpha T^3$ mit Konstanten α und γ.

(a) Betrachte die Änderung der Entropien beim Temperaturübergang $T = 0 \to T_c$. Nutze, dass am kritischem Punkt T_c die Entropien der beiden Phasen gleich sein müssen sowie den 3. Hauptsatz der Thermodynamik um α durch γ und T_c auszudrücken. Du solltest

$$\alpha = 3\gamma/T_c^2$$

finden.

(b) Bestimme nun die Differenz der inneren Energien des Metalls in normaler und supraleitender Phase bei $T = 0$. Drücke das Ergebniss durch γ und T_c aus und nutze, dass die innere Energien für beide Phasen bei $T = T_c$ gleich sind.

H 11.2 Tripelpunkt *(2+3+1=6) Punkte*

In der Nähe des Tripelpunktes für Ammoniak lautet die Sublimationskurve $\ln P = 27,79 - 3726/T$ und die Verdampfungskurve $\ln P = 24,1 - 3005/T$. Dabei sind P in Pascal und T in Kelvin gemessen. Betrachte Ammoniakgas als ideales Gas und vernachlässige die spezifischen Volumina des flüssigen bzw. festen Ammoniaks.

(a) Wie groß sind Druck und Termperatur im Tripelpunkt?

(b) Wie groß sind die latente Sublimations- und die latente Verdampfungswärme am Tripelpunkt?

(c) Wie groß ist die latente Schmelzwärme am Tripelpunkt?

H 11.3 Bernoulli Zahlen und ζ-funktion *(2+2+2+2+3+3+3=17) Punkte*

Im folgenden werden wir einige Identitäten zeigen, die wir für das Bose- und Fermigas noch benötigen werden.

Die Bernoulli-Polynome $B_n(x)$ werden mittels folgender erzeugender Funktion definiert

$$g(x,z) := \frac{z\mathrm{e}^{xz}}{\mathrm{e}^z - 1} =: \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{z^n}{n!} \quad |z| < 2\pi \tag{1}$$

Die Bernoulli-Zahlen sind dann definiert durch $B_n := B_n(0)$.

(a) Zeige zunächst:

(i) Zuerst: $g(1-x,z) = g(x,-z)$ und dann $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$.

(ii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}B_n(x) = B_n^{'}(x) = nB_{n-1}(x)$, $n \in \mathbb{N}$; $B_0^{'}(x) = 0$; indem du zuerst $\frac{\partial}{\partial x}g(x,z)$ berechnest.

(iii) Zuletzt $g(-x,-z) - g(x,z) = z\mathrm{e}^{xz}$ und dann $(-1)^n B_n(-x) - B_n(x) = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Zeige nun

$$B_0 = 1\,, \quad B_1 = -\frac{1}{2}\,, \quad B_2 = \frac{1}{6}\,, \quad B_{2n+1} = 0 \;\; n \in \mathbb{N}_0\,, \quad B_4 = -\frac{1}{30}\,.$$

(c) Überprüfe als nächstes durch partielle Integration:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{d}x f(x) = \int_0^1 f(x)B_0(x) &= \int_0^1 f(x)B_1^{'}(x) \\ &= \frac{1}{2}\left(f(1) + f(0)\right) - \int_0^1 \mathrm{d}x f^{'}(x)B_1(x)\end{aligned}$$

und zeige mit vollständiger Induktion, dass

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{d}x f(x) = \frac{1}{2}\left(f(1) + f(0)\right) &- \sum_{p=0}^{q} \frac{B_{2p}}{(2p)!}\left(f^{(2p-1)}(1) - f^{(2p-1)}(0)\right) \\ &+ \frac{1}{(2q)!}\int_0^1 \mathrm{d}x f^{(2q)}(x)B_{2q}(x)\,.\end{aligned}$$

(d) Man kann mit Hilfe komplexer Funktiontheorie zeigen, dass

$$B_{2k} = -2\frac{(-1)^k(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\zeta(2k)\,, \quad k \in \mathbb{N}\,,$$

mit der Riemannschen Zeta-Funktion

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\,.$$

(e) Nutze

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^{s-1} \mathrm{e}^{-\alpha x} = \frac{\Gamma(s)}{\alpha^s}$$

um damit

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \mathrm{d}x \frac{x^{s-1}}{\mathrm{e}^x - 1} = \zeta(s)$$

zu zeigen.

(f) Benutzte

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k^s} = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^s} - 2 \sum_{l=1}^\infty \frac{1}{(2l)^s} = (1 - 2^{1-s}) \sum_{k=1} \frac{1}{k^s}$$

um zu zeigen, dass

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \mathrm{d}x \frac{x^{s-1}}{\mathrm{e}^x + 1} = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s)\,.$$

(g) Zeige jetzt

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x \frac{x^{2k-1}}{\mathrm{e}^x + 1} = \frac{(2^{2k-1} - 1)(-1)^{k+1} \pi^{2k} B_{2k}}{2k}, \qquad \int_0^\infty \mathrm{d}x \frac{x^{2k-1}}{\mathrm{e}^x - 1} = (-1)^{k+1} \frac{(2\pi)^{2k} B_{2k}}{4k}$$

und berechne die Integrale:

$$\int_0^\infty \frac{x}{\mathrm{e}^x + 1} = \frac{\pi^2}{12}, \qquad \int_0^\infty \mathrm{d}x \frac{x^3}{\mathrm{e}^x + 1} = \frac{7\pi^4}{120}, \qquad \int_0^\infty \mathrm{d}x \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \int_0^\infty \mathrm{d}x \frac{x^3}{\mathrm{e}^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}\,.$$

(h) Zeige, dass alle nichttrivialen Nullstellen der komplexwertigen Zetafunktion Realteil 1/2 haben.