Klassische Theoretische Physik II: Elektrodynamik (WiSe 2025/26) 2. Übungszettel (22. Oktober 2025)

Abgabe der Hausaufgaben bis: Mittwoch, 29. Oktober.

1 Präsenzaufgaben

1.1 Produktregel für den $\vec{\nabla}$ Operator

Zeigen Sie durch explizite Berechnung, dass für beliebige (aber differenzierbare) Vektorwertige Funktionen (oder Vektorfelder) $\vec{V}(\vec{r})$, $\vec{W}(\vec{r})$ gilt (s. Gl.(M2.15) aus der Vorlesung):

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\vec{V}(\vec{r}) \times \vec{W}(\vec{r})\right] = \vec{W}(\vec{r}) \cdot \left[\vec{\nabla} \times \vec{V}(\vec{r})\right] - \vec{V}(\vec{r}) \cdot \left[\vec{\nabla} \times \vec{W}(\vec{r})\right] . \tag{1}$$

Hinweis: Benutzen Sie kartesische Koordinaten, wie in der Vorlesung, sodass $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$, s. Gl.(M2.7) aus der Vorlesung.

1.2 Zweite Ableitungen

Die zweite Ableitung f" einer Funktion f ist definiert als (vgl. Gl.(2) aus dem 1. Übungszettel):

$$f"(x) = \frac{d}{dx} f'(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f'(x+\delta) - f'(x)}{\delta} . \tag{2}$$

Partielle zweite Ableitungen können analog definiert werden; beispielsweise für eine Funktion zweier Variablen $f(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\delta \to 0} \frac{\partial f(x+\delta, y)/\partial y - \partial f(x, y)/\partial y}{\delta} . \tag{3}$$

Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass für hinreichend oft differenzierbare Funktionen gilt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} . \tag{4}$$

Hinweis: Benutzen Sie die Definition der ersten Ableitung aus dem ersten Übungszettel; zweite Ableitungen haben dann ein δ^2 im Nenner.

2 Hausaufgaben

2.1 Produktregel für den $\vec{\nabla}$ Operator

Zeigen Sie durch explizite Berechnung, dass für beliebige (aber differenzierbare) Vektor-wertige Funktionen (oder Vektorfelder) $\vec{V}(\vec{r})$, $\vec{W}(\vec{r})$ gilt (s. Gl.(M2.13) aus der Vorlesung):

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\left[\vec{V}(\vec{r})\cdot\vec{W}(\vec{r})\right] &= \vec{V}(\vec{r})\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{W}(\vec{r})\right]+\vec{W}(\vec{r})\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{V}(\vec{r})\right]\\ &\quad+\left[\vec{V}(\vec{r})\cdot\vec{\nabla}\right]\vec{W}(\vec{r})+\left[\vec{W}(\vec{r})\cdot\vec{\nabla}\right]\vec{V}(\vec{r})\,.\end{aligned} \tag{5}$$

Hinweis: Benutzen Sie kartesische Koordinaten, wie in der Vorlesung. **[4P]**

2.2 Doppelte Anwendung des Nabla Operators

Zeigen Sie durch explizite Rechnung in Komponenten, dass für ein hinreichend oft differenzierbares Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ gilt (s. Gl.(M2.24) aus der Vorlesung):

$$\vec{\nabla}\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r})\right]=\vec{\nabla}\left[\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r})\right]-\Delta\vec{A}(\vec{r})\,; \tag{6}$$

d.h. rot rot$\vec{A}$ = div grad$\vec{A}-\Delta\vec{A}$, wobei $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ der Laplace-Operator ist (s. Gl.(M2.23) aus der Vorlesung); $\Delta\vec{A}$ bedeutet, dass dieser Operator auf jede Komponente von $\vec{A}$ angewandt wird.. **[5P]**

2.3 Vektorfeld mit verschwindender Rotation

Gegen sei das Vektorfeld $\vec{V}(\vec{r})=\begin{pmatrix} af(x)\\ bf(y)\\ cf(z)\end{pmatrix}$; f ist eine beliebige (differenzierbare) Funktion einer Variablen, und a, b, c sind Konstanten.

1. Zeigen Sie, dass $\vec{\nabla}\times V=0\ \forall\vec{r}$, unabhängig von der Definition der Funktion f. **[1P]**
2. In der Vorlesung wurde behauptet, dass ein Vektorfeld mit verschwindender Rotation als Gradient eines Skalarfelds geschrieben werden kann. Geben Sie ein Skalarfeld $g(x,y,z)$ an, sodass $\vec{V}=\vec{\nabla}g$. *Hinweis:* Betrachten Sie die Stammfunktion F von f, d.h. $F'=f$. **[2P]**
3. Zeigen Sie, dass die Definition von g *nicht* eindeutig ist. **[1P]**.