

Klassische Theoretische Physik II: Elektrodynamik (WiSe 2025/26) 3. Übungszettel (29. Oktober 2025)

Abgabe der Hausaufgaben bis: Mittwoch, 5. November.

1 Präsenzaufgaben

1.1 Lösung der Laplace-Gleichung mit Randbedingungen

In der Vorlesung hatten wir die Laplace-Gleichung mit folgenden Randbedingungen gelöst: (i) $U(x, y = 0) = 0 \forall x$; (ii) $U(x, y = \pi) = 0 \forall x$; (iii) $U(x = 0, y) = U_0(y) \forall y \in [0, \pi]$, mit $U_0(0) = U_0(\pi) = 0$; (iv) $U(x \rightarrow \infty, y) \rightarrow 0 \forall y \in [0, \pi]$. Die Lösung war gegeben durch, s. Gl.(1.20):

$$U(x, y) = \sum_n b_n e^{-nx} \sin(ny), \quad (1)$$

wobei die Summe über positive ganze Zahlen n geht und die Koeffizienten b_n aus der Fourier-Zerlegung der Randbedingung $U(x = 0, y \in [0, \pi]) = U_0(y)$ berechnet werden können.

1. Wie lautet das entsprechende elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$?
2. Berechnen Sie die Koeffizienten b_n explizit, für:

(i) $U_0(y) = \sin(3y)$;

(ii) $U_0(y) = \begin{cases} y, & \text{falls } y \in [0, \pi/2] \\ \pi - y, & \text{falls } y \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$.

Hinweis: $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi dy U_0(y) \sin(ny)$, s. Gl.(1.23).

Zeigen Sie zunächst, dass die Stammfunktion von $x \sin(ax)$ gegeben ist durch $\frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x \cos(ax)}{a}$, für reelle Konstante $a \neq 0$.

Bemerkung: Die Fourier-Zerlegung findet zahlreiche weitere Anwendungen in der Physik, z.B. bei der Analyse einer schwingenden Saite.

2 Hausaufgaben

2.1 Laplace-Gleichung mit (anderen!) Randbedingungen

In dieser Aufgabe wollen wir wieder die (effektiv zwei-dimensionale) Laplace-Gleichung lösen, diesmal aber mit anderen Randbedingungen:

(i) $U(x, y = 0) = 0 \forall x \in [0, 1]$;

(ii) $U(x, y = 1) = U_1(x)$, $x \in [0, 1]$ mit $U_1(0) = U_1(1) = 0$;

(iii) $U(x = 0, y) = 0 \forall y \in [0, 1]$;

(iv) $U(x = 1, y) = 0 \forall y \in [0, 1]$.

Gesucht ist $U(x, y)$ für $x \in [0, 1]$ und $y \in [0, 1]$. Dazu werden wir, wie in der Vorlesung, einen Faktorisierungsansatz machen, d.h. $U(x, y) = X(x)Y(y)$; die Funktionen X, Y müssen dann die Differenzialgleichungen $X'' = cX$, $Y'' = -cY$ erfüllen, wobei c eine reelle Konstante ist.

1. Anders als im Beispiel, das in der Vorlesung behandelt wurde, ist es hier nicht sofort klar, ob wir eine in x oder y oszillierende Lösung benötigen, d.h. ob $c > 0$ oder $c < 0$. Zeigen Sie, dass $c > 0$, d.h. oszillierende Lösung in y und exponentielle Lösung in x , *nicht* funktioniert. *Hinweis:* Benutzen Sie zunächst Bedingung (i), um die oszillierende Lösung $Y(y)$ einzuschränken, und zeigen Sie dann, dass die Randbedingungen (iii) und (iv) nur für $X = 0$ erfüllt werden können, was im Widerspruch zur Bedingung (ii) ist. [3P]
2. Versuchen wir nun also $c < 0$, d.h. oszillierendes $X(x)$. Benutzen Sie zunächst Bedingung (iii), um den Ansatz für $X(x)$ zu vereinfachen. Bedingung (iv) beschränkt c auf diskrete Werte. Bedingung (i) führt zu einer Beziehung zwischen den Koeffizienten in $Y(y)$. Bedingung (ii) führt schließlich wieder zu einer Fourier-Zerlegung. [5P]
3. Führen Sie die Fourier-Zerlegung explizit durch, d.h. bestimmen Sie die verbleibenden Koeffizienten durch Integration, für $U_1(x) = 1 - 4(x - 0.5)^2$. [3P]

2.2 Kugelkoordinaten

Probleme mit voller Rotationssymmetrie sind oft einfacher in Kugelkoordinaten zu lösen. In diesen Koordinaten ist der Ortsvektor $\vec{r}$ gegeben durch

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (2)$$

d.h. $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$ und $z = r \cos \theta$.

1. Zeigen Sie, dass $|\vec{r}| = r$. [1P]
2. Im nächsten Schritt wollen wir drei orthogonale Einheitsvektoren definieren, die den drei Kugelkoordinaten r, θ, ϕ entsprechen. Sei ξ eine allgemeine Koordinate, dann ist der entsprechende Einheitsvektor

$$\vec{e}_\xi \propto \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi}. \quad (3)$$

Zeigen Sie zunächst, dass das in kartesischen Koordinaten in der Tat die drei Einheitsvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ reproduziert, mit $\xi = x$, $\xi = y$ bzw. $\xi = z$. [2P]

3. Nun wenden Sie diese Vorschrift auf $\vec{r}$ in Kugelkoordinaten an, s. Gl.(2), und berechnen Sie so $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ und $\vec{e}_\phi$. Zeigen Sie, dass diese drei Vektoren in der Tat senkrecht zu einander stehen. *Hinweis:* Gl.(3) legt nur die Richtung des entsprechenden Einheitsvektors fest; die Normierung folgt aus $|\vec{e}_\xi| = 1 \ \forall \xi$. [4P]