

Klassische Theoretische Physik II: Elektrodynamik (WiSe 2025/26) 1. Übungszettel (15. Oktober 2025)

Abgabe der Hausaufgaben bis: Mittwoch, 22. Oktober.

1 Präsenzaufgaben

1.1 Produkte von Vektoren

1. Gegeben seien zwei Vektoren $\vec{V}, \vec{W}$ im drei-dimensionalen Raum ($d = 3$). Was kann man über den Winkel zwischen diesen beiden Vektoren sagen, wenn: (i) $\vec{V} \cdot \vec{W} = 0$; (ii) $\vec{V} \cdot \vec{W} = |\vec{V}||\vec{W}|$; (iii) $\vec{V} \cdot \vec{W} = -|\vec{V}||\vec{W}|$; (iv) $\vec{V} \cdot \vec{W} = |\vec{V} \cdot \vec{W}|$; (v) $\vec{V} \times \vec{W} = 0$?
2. Gegeben sei ein Vektor $\vec{V}$ in einem d -dimensionalen Raum. Wieviele verschiedene Einheitsvektoren $\vec{e}_i$ gibt es, die folgende Bedingungen erfüllen: $\vec{e}_i \cdot \vec{V} = 0$ und $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \delta_{ik}$, wo δ_{ik} das Kronecker- δ ist (d.h. $\delta_{ik} = 0$ für $i \neq k$ und $\delta_{ik} = 1$ für $i = k$)?
3. Sei $\vec{V} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ein Vektor in einem zwei-dimensionalen Raum (d.h. einer Ebene, $d = 2$); a und b seien fest vorgegeben. (i) Wie kann man einen allgemeinen Vektor $\vec{W}$ schreiben, der in der selben Ebene liegt und $\vec{V} \cdot \vec{W} = 0$ erfüllt? (ii) Darauf aufbauend, wie kann man einen allgemeinen Vektor $\vec{U}$ schreiben, der in der selben Ebene liegt und $\vec{V} \cdot \vec{U} = 17$ erfüllt? *Hinweis:* In beiden Fällen enthält der gesuchte Vektor eine freie multiplikative Konstante t , d.h. die gewünschte Eigenschaft gilt $\forall t$; deshalb "allgemeiner Vektor".
4. Wir betrachten die drei Einheitsvektoren $\vec{e}_1 = \vec{e}_x$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_y$, $\vec{e}_3 = \vec{e}_z$, die einen drei-dimensionalen (kartesischen) Raum aufspannen. Zeigen Sie, u.a. durch explizite Rechnung, dass für diese drei Vektoren gilt:

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \vec{e}_k. \quad (1)$$

Hierbei ist ϵ_{ijk} total antisymmetrisch in allen Indizes, d.h. $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{kij} = -\epsilon_{ikj}$, mit $\epsilon_{123} = +1$. Zeigen Sie zunächst, dass die 1. Eigenschaft impliziert, dass $\epsilon_{ijk} = 0$ falls (mindestens) zwei der drei Indizes gleich sind ($i = j$ oder $i = k$ oder $j = k$). Zeigen Sie dann, dass jeweils höchstens ein Term in der Summe auf der rechten Seite von Gl.(1) von null verschieden ist.

1.2 Ableitungen

1. Die erste Ableitung einer Funktion $f(x)$ ist definiert durch

$$f'(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(x + \delta) - f(x)}{\delta}. \quad (2)$$

Zeigen Sie, dass daraus $(x^n)' = nx^{n-1}$ folgt. *Hinweis:* Benutzen Sie das Ergebnis $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$, mit Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, und überzeugen Sie sich, dass Sie nur die Terme mit $k \leq 1$ benötigen.

2. Die Taylor-Reihe erlaubt die Entwicklung einer ∞ oft ableitbaren Funktion um einen "Stützwert" x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(x_0) + \dots = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!} \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x=x_0}. \quad (3)$$

Diese Entwicklung konvergiert oft nur für hinreichend kleine $|x - x_0|$. Benutzen Sie die Taylor-Reihe, und die Definition (2), um die Kettenregel herzuleiten:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x). \quad (4)$$

Hinweis: Sie müssen die Taylor-Entwicklung zweimal anwenden, aber brauchen nur Terme bis zur 1. Ableitung zu berücksichtigen.

2 Hausaufgaben

2.1 Rotation und Spiegelung in drei Dimensionen

In der Vorlesung wurde die explizite Form einer zwei-dimensionalen (d.h., 2×2) Rotationsmatrix gezeigt. In dieser Aufgabe leiten wir zunächst eine explizite Darstellung einer allgemeinen Rotationsmatrix in drei Dimensionen her, und zeigen dann, dass diese allgemeine Darstellung nicht erlaubt, eine Spiegelung zu beschreiben (d.h. in $d = 3$ ist eine Spiegelung keine Rotation, im Unterschied zu $d = 2$).

1. Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass die Matrix

$$\mathbf{O}_y(\phi_2) = \begin{pmatrix} \cos \phi_2 & 0 & \sin \phi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi_2 & 0 & \cos \phi_2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

eine Rotation in der (x, z) Ebene (d.h. um die y Achse) beschreibt, mit Rotationswinkel ϕ_2 . [1P]

2. Wie sehen die entsprechenden 3×3 Rotationsmatritzen $\mathbf{O}_z(\phi_1)$ und $\mathbf{O}_x(\phi_3)$ aus, die Drehungen in der (x, y) Ebene (d.h. um die z Achse) um den Winkel ϕ_1 und in der (y, z) Ebene (d.h. um die x Achse) um den Winkel ϕ_3 beschreiben? [1P]
3. Berechnen Sie explizit eine allgemeine Rotationsmatrix als Produkt $\mathbf{O}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \mathbf{O}_z(\phi_1)\mathbf{O}_y(\phi_2)\mathbf{O}_x(\phi_3)$. *Hinweis:* Die Matrixmultiplikation ist assoziativ, d.h. es spielt keine Rolle, ob Sie zuerst das Produkt $\mathbf{O}_z\mathbf{O}_y$ berechnen, oder zuerst das Produkt $\mathbf{O}_y\mathbf{O}_x$. Die Matrixmultiplikation ist aber *nicht* kommutativ, d.h. Sie dürfen die Reihenfolge der Faktoren in der Regel nicht ändern. (Produkte wie $\mathbf{O}_z\mathbf{O}_x\mathbf{O}_y$ etc. können auch als allgemeine Parameterisierung einer 3×3 Rotationsmatrix benutzt werden, aber die Bedeutung der Winkel ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 ist dann eine Andere.) [3P]
4. Eine Spiegelung wird beschrieben durch die Matrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Zeigen Sie, dass es nicht möglich ist, die Winkel ϕ_1 , ϕ_2 und ϕ_3 so zu wählen, dass $\mathbf{O}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \mathbf{P}$. *Hinweis:* Zwei Matritzen sind genau dann gleich, wenn *alle* ihre Elemente gleich sind. Benutzen Sie das $(3, 1)$ Element von $\mathbf{O}$ um zu zeigen, dass $\mathbf{O} = \mathbf{P}$ nur möglich ist, wenn $\sin \phi_2 = 0$, sodass $|\cos \phi_2| = 1$. Damit können Sie zeigen, dass $\sin \phi_1 = \sin \phi_3 = 0$ gelten muss. Die gewünschte Aussage kann z.B. gezeigt werden, indem man die beiden Möglichkeiten $\cos \phi_1 = +1$ und $\cos \phi_1 = -1$ ausprobiert. [3P]

2.2 Ableitungen trigonometrischer Funktionen

Bestimmen Sie die ersten Ableitungen der Sinus- und Kosinus-Funktion direkt aus der Definition (2), d.h. zeigen Sie, dass (i) $(\sin x)' = \cos x$ und (ii) $(\cos x)' = -\sin x$. *Hinweis:* Sie können benutzen, dass für beliebige reelle Argumente α, β gilt $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ und $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$; und dass für $|\delta| \ll 1$ gilt: $\sin \delta = \delta + \mathcal{O}(\delta^3)$, $\cos \delta = 1 - \frac{\delta^2}{2} + \mathcal{O}(\delta^4)$. (Ein Korrekturterm $\mathcal{O}(\delta^n)$ bedeutet, dass im Grenzfall $\delta \rightarrow 0$ die Korrektur dividiert durch δ^m verschwindet falls $m < n$.) [4P]

2.3 Produktregel für Ableitungen

Zeigen Sie direkt aus der Definition (2), dass für die Ableitung eines Produktes zweier Funktionen gilt: $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$. *Hinweis:* Benutzen Sie die Taylor-Entwicklung (3)! [2P]