Klassische Theoretische Physik II: Elektrodynamik (WiSe 2025/26) 10. Übungszettel (10. Dezember 2025)

Abgabe der Hausaufgaben bis: Mittwoch, 7. Januar.

1 Präsenzaufgaben

1.1 Quickies

Ab jetzt werden die Übungszettel regelmäßig Kurzfragen ("Quickies") enthalten; auch in den Abschlussklausuren werden solche Fragen vorkommen, und ca. 25% der gesamten Punktzahl ausmachen. Hier wird grundlegendes Faktenwissen abgefragt, sowie einige sehr kurze Herleitungen.

Q1: Wie lauten die Maxwell-Gleichungen in Integralform?

Q2: Wie hängt die Energiedichte einer ebenen elektromagnetischen Welle von ihrer Amplitude $\vec{E}_0$ ab? *Hinweis:* Gefragt ist die funktionale Form, nicht der Vorfaktor.

Q3: Wie lautet die Beziehung zwischen der Frequenz ω (genauer: $\omega = 2\pi f$, wobei f die Frequenz ist) und dem Betrag des Wellenvektors $|\vec{k}|$? Und was ist die Beziehung zwischen $|\vec{k}|$ und der Wellenlänge λ? *Hinweis:* Für eine eindimensionale ebene Welle $f(x,t)$ ist λ der kleinste Wert, der $f(x,t) = f(x+\lambda, t)\ \forall t$ erfüllt.

1.2 Retardierte Potenziale und Lorentz–Eichung

In der Vorlesung hatten wir gesehen, dass Gln.(4.19) die Maxwell–Gleichungen erfüllt, wenn man diese mit Hilfe der Lorentz–Eichung in die Form (4.18) bringt. Wir hatten aber noch nicht gezeigt, dass (4.19) auch die Lorentz–Bedingung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_L(\vec{r},t) = -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial U_L(\vec{r},t)}{\partial t}$ erfüllt.

1. Zeigen Sie zunächst, dass für eine beliebige (differenzierbare) skalare Funktion f gilt:

$$\vec{\nabla}_r f(|\vec{r}-\vec{r}\,'|) = -\vec{\nabla}_{r'} f(|\vec{r}-\vec{r}\,'|)\,, \tag{1}$$

   d.h. die Ableitungen bezüglich $\vec{r}$ und bezüglich $\vec{r}\,'$ unterscheiden sich lediglich um ein Vorzeichen, falls die abzuleitende Funktion nur vom Abstand $|\vec{r}-\vec{r}\,'|$ abhängt.

2. Benutzen Sie die Produktregel (M2.14) aus der Vorlesung,

$$\vec{\nabla} \cdot \left[f(\vec{r})\vec{V}(\vec{r}) \right] = f(\vec{r})\vec{\nabla} \cdot \vec{V}(\vec{r}) + \vec{V}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r})\,,$$

um zu zeigen, dass

$$\vec{\nabla}_r \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}\,', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \left[\vec{\nabla}_r \cdot \vec{j}(\vec{r}\,', t_r) + \vec{\nabla}_{r'} \cdot \vec{j}(\vec{r}\,', t_r) \right] - \vec{\nabla}_{r'} \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}\,', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \,. \tag{2}$$

Dabei hängt die retardierte Zeit $t_r = t - |\vec{r} - \vec{r}\,'|/c$ vom Abstand $|\vec{r} - \vec{r}\,'|$ ab.

3. Benutzen Sie die Kontinuitätsgleichung $\vec{\nabla}_{r'} \cdot \vec{j}(\vec{r}\,') = -\partial \rho(\vec{r}\,')/\partial t$, die für feste Zeit gilt (d.h. t_r wird fest gehalten), und Gl.(1), um zu zeigen, dass

$$\vec{\nabla}_{r'} \cdot \vec{j}(\vec{r}\,', t_r) = -\vec{\nabla}_r \cdot \vec{j}(\vec{r}\,', t_r) - \frac{\partial \rho(\vec{r}\,', t_r)}{\partial t} \,. \tag{3}$$

4. Die gesuchte Beziehung (Lorentz–Bedingung) folgt, wenn Sie Gln.(2) und (3) zur Berechnung von $\vec{\nabla}_r \cdot \vec{A}_L(\vec{r}, t)$ benutzen. Dabei muss das Integrationsvolumen hinreichend groß gewaehlt werden, sodass der Randterm verschwindet. (Das ist keine zusätzliche Bedingung, da in Gln.(4.19) ohnehin über das gesamte Volumen integriert werden muss, in dem ρ bzw. $\vec{j}$ nicht verschwinden.)

2 Hausaufgaben

Diese fallen diesmal etwas länger aus, damit Sie sich über die lange vorlesungsfreie Zeit nicht zu sehr langweilen.

2.1 Biot–Savart Gesetz

Wir hatten in der Vorlesung für stationäre Ströme das Biot–Savart Gesetz hergeleitet, s. Gl.(2.8):

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \,. \tag{4}$$

Leiten Sie dies aus dem statischen Grenzfall der allgemeinen Lösung für das Vektorpotenzial in Lorentz–Eichung her, Gl.(4.19b):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \,. \tag{5}$$

Hinweis: Sie benötigen die Produktregel (M2.16) aus der Vorlesung. Die Ableitung, die $\vec{B}(\vec{r})$ mit $\vec{A}(\vec{r})$ in Verbindung setzt, wirkt nur auf $\vec{r}$, nicht auf $\vec{r}\,'$; deshalb trägt nur ein Term aus der Produktregel bei. **[4P]**

2.2 Energie eines Wellenpakets

In dieser Aufgabe wollen wir die Energie eines Wellenpakets berechnen. Wir beschränken uns auf den Beitrag des elektrischen Feldes, da wir bereits gesehen hatten, dass für jede Mode das elektrische und magnetische Feld gleichermaßen beitragen, d.h. die gesamte Energie eines elektromagnetischen Wellenpakets ergibt sich durch Multiplikation mit 2.

Ausgangspunkt ist der Ausdruck für das elektrische Feld im Wellenpaket, s. Gl.(4.8) aus der Vorlesung:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\int \mathrm{d}^3k \vec{\tilde{E}}_0(\vec{k}) \mathrm{e}^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right], \tag{6}$$

mit $\vec{\tilde{E}}_0 \cdot \vec{k} = 0$ und $\omega = c|\vec{k}|$, wobei $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist. Wir wollen die Energie berechnen, die dieses Feld trägt, s. Gl.(3.27) aus der Vorlesung:

$$\mathcal{E} = \frac{\epsilon_0}{2}\int \mathrm{d}^3r |\vec{E}(\vec{r},t)|^2 . \tag{7}$$

1. Eine relativ einfache Rechenmethode betrachtet das elektrische Feld $\vec{E}$ als *komplexe* Größe, d.h. der Re in Gl.(6) wird weg gelassen, und in Gl.(7) ersetzt man $|\vec{E}|^2 = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{E}^*$. Warum ist der Faktor 1/2 notwendig? **[1P]**

2. Benutzen Sie nun diesen Ansatz, um zu zeigen, dass
$$\mathcal{E} = 4\pi^3\epsilon_0 \int \mathrm{d}^3k \left|\vec{\tilde{E}}_0(\vec{k})\right|^2 . \tag{8}$$
Hinweis: Beachten Sie, dass zunächst eine dreifache Integration, über unabhängige Wellenvektoren $\vec{k}$ und $\vec{k}'$ und über $\vec{r}$, notwendig ist, und benutzen Sie Gl.(M5.9) aus der Vorlesung! **[3P]**

3. Interpretieren Sie das Ergebnis (8). **[2P]**

4. Die Notwendigkeit des Faktors 1/2 in der ersten Teilaufgabe kann man natürlich auch streng herleiten, indem man Gl.(6) in Gl.(7) einsetzt. Führen Sie diese (etwas längliche) Rechnung aus. *Hinweis:* Da die (drei-dimensionale) Integrationsvariable $\vec{k}$ in Gl.(6) reell ist, kann man den Realteil in das Integral ziehen. Der Integrand selber ist aber ein Produkt zweier komplexer Faktoren; das Realteil des Produkts hat zwei Terme, wenn ausgedrückt durch die Real– und Imaginärteile der Faktoren. Um wieder Gl.(M5.9) ausnutzen zu können, müssen Sie die Sinus– und Kosinusfunktionen, die dabei entstehen, wieder als Summe bzw. Differenz von komplexen e–Funktionen ausdrücken. Das generiert zunächst 16 Terme, auf die jeweils Gl.(M5.9) angewandt werden kann. Manche dieser Terme verschwinden identisch nach d^3r Integration; viele weitere verschwinden, wenn man annimmt, dass $\vec{\tilde{E}}_0(\vec{k})\cdot\vec{\tilde{E}}_o(-\vec{k}) = 0$ (warum sollte das zutreffen für ein Wellenpaket?), oder wenn man über die Zeit mittelt. **[5P]**

2.3 Klassisches Atom

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass ein klassisches Modell eines Wasserstoff–Atoms (ein Elektron umkreist einen Kern) im Bruchteil einer Nanosekunde seine Energie durch Abstrahlung verliert, d.h. das Elektron stürzt in den Kern. Hier wollen wir einige Schritte dieser Rechnung reproduzieren.

1. Zeigen Sie, dass für ein Elektron auf einer Kreisbahn in einem attraktiven $1/r$ Potenzial, $E_{\rm kin} = -E_{\rm pot}/2$. *Hinweis:* Benutzen Sie Newton'sche Mechanik! **[2P]**

2. Benutzen Sie dieses Ergebnis, sowie die numerischen Werte von ϵ_0, Gl.(1.3a), und für die Elementarladung $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, um zu zeigen, dass für einen Bahnradius $r = 10^{-10}$ m die Bahngeschwindigkeit $v \simeq 0.01\,c$, wie in der Vorlesung angenommen; dabei ist $c = 3 \cdot 10^8$ m/s die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. *Hinweis:* Die Größe eines Atoms war zu Beginn des 20. Jahrhunderts bereits näherungsweise bekannt; die Tatsache, dass Atomkerne sehr viel kleiner sind als Atome, wurde von Rutherford 1910 gezeigt. Das Problem der radiativen Instabilität des klassichen Atoms wurde provisorisch in Bohrs Atommodell gelöst (1914), in voller Strenge erst nach Entwicklung der Quantenmechani (1925). **[2P]**

2.4 Bonus-Aufgabe: Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung

Hinweis: Bei der Berechnung des Bruchteils der Hausaufgaben, die Sie gelöst haben, zählt diese Aufgabe nur im Zähler, nicht im Nenner.

In dieser Aufgabe wollen wir uns das elektrische und magnetische Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung anschauen. Die Ladungsdichte ist gegeben durch

$$\rho(\vec{r}, t) = Q \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{v}t)\,, \tag{9}$$

mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$. In Gl.(9) haben wir den Ursprung des Koordinatensystems so gewählt, dass sich die Punktladung zur Zeit $t = 0$ am Ursprung befindet; die Bahnkurve des Teilchens in diesem Bezugssystem ist also

$$\vec{r}(t) = t\vec{v}\,. \tag{10}$$

Wir wollen zeigen, dass die Existenz eines von Null verschiedenen Vektorpotenzials, und somit auch eines magnetischen Feldes, vom Inertialsystem abhängt.

1. Da $\vec{v}$ konstant ist, lässt sich ein Inertialsystem finden, in dem sich die Punktladung nicht bewegt. Wie hängt der Ortsvektor $\vec{R}$ in diesem System mit dem ursprünglichen Ortsvektor $\vec{r}$ zusammen? (Diese "Gallilei Transformation" sollten Ihnen eigentlich aus der theoretischen Mechanik bekannt sein.) *Hinweis:* Zur Zeit $t = 0$ sollen beide Koordinatensysteme den gleichen Ursprung haben. **[1P]**

2. Wie sehen die Potenziale $U_L(\vec{R}, t)$, $\vec{A}_L(\vec{R}, t)$ in diesen “mitbewegten” Koordinaten aus? *Hinweis:* Die Antwort ist fast trivial. **[2P]**

3. Nun gehen wir zurück ins ursprüngliche System, in dem die Punktladung sich bewegt. Berechnen Sie das skalare Potenzial in Lorentz Eichung $U_L(\vec{r}, t)$ in diesem System. Benutzen Sie dazu Gl.(4.19a) aus der Vorlesung. Allerdings ist die Auflösung der $\delta-$“Funktion” hier etwas trickreich, da die retardierte Zeit t_r auch von der Integrationsvariable $\vec{r}\,'$ abhängt. Das 3–dimensionale Äquivalent von $g'(x_0)$ in Gl.(M5.7), das bei der Integration von $\delta(g(x))$ eine Rolle spielt, ist $1 - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$.[1] Zeigen Sie, dass das skalare Potenzial deshalb geschrieben werden kann als

$$U_L(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - t_r\vec{v}| - \vec{v} \cdot (\vec{r} - t_r\vec{v})/c} \,. \tag{11}$$

   [3P]

4. Zeigen Sie, dass im gleichen Bezugssystem,

$$\vec{A}_L(\vec{r}, t) = \vec{v}U_L(\vec{r}, t)/c^2 \,. \tag{12}$$

   Hinweis: Benutzen Sie Gln.(4.19b), (4.5) und (1.5) aus der Vorlesung! **[2P]**

5. Welche (mehr oder weniger) direkt messbare Gr̈ße, die aus $\vec{E}$ und $\vec{B}$ berechnet werden kann, sollte in allen Inertialsystemen den gleichen Wert haben? (Um das explizit zu zeigen, müssten wir $\vec{E}$ und $\vec{B}$ berechnen, was ebenfalls nicht ganz trivial ist, da t_r von $\vec{r}$ abhängt.) **[1P]**

[1] Um das zu sehen, schreiben Sie das Argument der $\delta-$“Funktion” als $\vec{r}\,' - \vec{v}t + \frac{\vec{v}}{c}\sqrt{(\vec{r} - \vec{r}\,') \cdot (\vec{r} - \vec{r}\,')}$, und leiten Sie nach $\vec{r}\,'$ ab.