# Klassische Theoretische Physik II: Elektrodynamik (WiSe 2025/26) 12. Übungszettel (14. Januar 2026)

**Abgabe der Hausaufgaben bis:** Mittwoch, 21. Januar.

# 1 Präsenzaufgaben

## 1.1 Quickies

Ab jetzt werden die Übungszettel regelmäßig Kurzfragen ("Quickies") enthalten; auch in den Abschlussklausuren werden solche Fragen vorkommen, und ca. 25% der gesamten Punktzahl ausmachen. Hier wird grundlegendes Faktenwissen abgefragt, sowie einige sehr kurze Herleitungen.

Q1: Wie ist $\gamma$ in der speziellen Relatitivätstheorie defininiert? Und wie erscheint $\gamma$ in der Zeitdilatation und in der Längenkontraktion?

Q2: Was ist ein Vierervektor?

Q3: Warum ist das "Zwillingsparadox" nicht paradox? Dieses Gedankenexperiment handelt von Zwillingen. Eine von ihnen geht auf eine Reise, und bewegt sich (zeitweise) nahezu mit Lichtgeschwindigkeit. Wenn sie zurück kommt, erscheint sie weniger gealtert als ihr Zwilling. ("Bewegte Uhren gehen langsamer" gilt natürlich auch für biologische Alterungsprozesse.) Das "Paradox" entsteht, weil vom Standpunkt der Reisenden aus ihr Zwilling sich bewegt hat, nach Abschluss der Reise aber stärker gealtert ist als sie selbst. Wie ist das verträglich mit der Äquivalenz aller Intertialsysteme?

## 1.2 Volumenelemente in der speziellen Relativitätstheorie

Zeigen Sie, dass das gewöhnliche Volumenelement $\mathrm{d}^3r$ *nicht* invariant unter einem Lorentz–Boost ist, das 4−Volumenelement $\mathrm{d}^4x := \mathrm{d}^3r\,\mathrm{d}t$ aber schon.

# 2 Hausaufgaben

## 2.1 Inverser Lorentz–Boost

Ein Lorentz–Boost in $z-$Richtung ist definiert durch, s. Gl.(5.15):

$$x = x' \,; \quad y = y' \,; \quad z = \gamma\left(z' + v_0 t'\right) \,; \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v_0}{c^2} z'\right) \,. \tag{1}$$

Dabei ist die Relativgeschwindigkeit zwischen den beiden Intertialsystemen $= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass die inversen Transformationen aus Gln.(1) hergeleitet werden können, mit den Substitutionen $x \leftrightarrow x'$, $y \leftrightarrow y'$, $z \leftrightarrow z'$, $t \leftrightarrow t'$ $v_0 \to -v_0$. *Hinweis:* Die inversen Transformationen müssen Ausdrücke für $x'$, $y'$, $z'$, $t'$ als Funktionen von $x$, $y$, $z$, $t$ liefern; wenn Sie diese Ausdrücke in die ursprüngliche Transformationen (1) einsetzen, müssen sich Identitäten ($x = x$, $y = y$ usw.) ergeben. **[3P]**

## 2.2 Lorentz–Boost in allgemeine Richtung

In dieser Aufgabe wollen wir die Transformationsgesetze für einen allgemeinen Boost aus Gln.(1) auf zwei verschiedene Arten herleiten. Die Richtung des Boosts sei gegeben durch den Einheitsvektor

$$\vec{e}_b = \begin{pmatrix} \cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} . \tag{2}$$

1. Die erste Methode benutzt explizite Rotationen, beschrieben durch die Matrix $\mathcal{O}$ und die inverse Matrix $\mathcal{O}^{-1} = \mathcal{O}^T$. Zeigen Sie, dass

   $$\mathcal{O}\vec{e}_z = \vec{e}_b, \tag{3}$$

   falls

   $$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta\,; & -\sin\phi\,; & \cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\cos\theta\,; & \cos\phi\,; & \sin\phi\sin\theta \\ -\sin\theta\,; & 0\,; & \cos\theta \end{pmatrix} . \tag{4}$$

   Dabei ist $\vec{e}_z$ der Einheitsvektor in $z$ Richtung, und $\vec{e}_b$ der Einheitsvektor aus Gl.(2). Ist der Ausdruck für $\mathcal{O}$ eindeutig? **[2P]**

2. Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass das Produkt $\mathcal{O}\mathcal{O}^T$ die Einheitsmatrix ergibt, wie für eine Rotationsmatrix notwendig (damit die Länge eines Vektors unter Rotationen invariant bleibt); dabei bezeichnet das Superskript $T$ die Transposition (Spiegelung an der Diagonalen), d.h. $\left(\mathcal{O}^T\right)_{ik} = \mathcal{O}_{ki}$. **[2P]**

3. Um Gln.(1) anwenden zu können, rotieren wir in ein System, in dem der Boost in $z$ Richtung erfolgt; wir wollen Vektoren in diesem System mit einer Tilde kennzeichnen, d.h. $\tilde{\vec{e}}_b = \vec{e}_z$. Zeigen Sie, dass $\vec{r} = \mathcal{O}\tilde{\vec{r}}$, und berechnen Sie explizit $x$, $y$ und $z$ als Funktion von $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ und $\tilde{z}$. (Identische Ausdrücke gelten für die bewegten Koordinaten $x'$, $y'$ und $z'$ als Funktionen von $\tilde{x}'$, $\tilde{y}'$ und $\tilde{z}'$.) **[3P]**

4. In diesem System gelten Gln.(1); sie erlauben es, $\tilde{\vec{r}}$ und $t$ durch $\tilde{\vec{r}}'$ und $t'$ auszudrücken. Um das gesuchte Ergebnis im urspünglichen (nicht rotierten) Koordinatensystem zu bekommen, muss man diese Rotation wieder rückgängig machen, mittels $\tilde{\vec{r}}' = \mathcal{O}^T\vec{r}'$. *Hinweis:* Für $\gamma = 1$ müssen die resultierenden "Transformationen" Identitäten sein.

Das ist leichter zu sehen, wenn man $\gamma = (\gamma - 1) + 1$ schreibt, sodass $\vec{r} = \vec{r}\,' + (\gamma - 1)(\dots)$. **[5P]**

5. Alternativ kann man den Koordinatenvektor in Anteile parallel und senkrecht zu $\vec{e}_b$ aufspalten:
$$\vec{r} = \vec{r}_p + \vec{r}_s \,. \tag{5}$$
Zeigen Sie, dass der Parallelanteil gegeben ist durch
$$\vec{r}_p = \vec{e}_b \left( \vec{r} \cdot \vec{e}_b \right) \,. \tag{6}$$
*Hinweis:* Offensichtlich zeigt $\vec{r}_p$ in Richtung $\vec{e}_b$. Zu zeigen ist, dass der Rest $\vec{r}_s = \vec{r} - \vec{r}_p$ senkrecht zu $\vec{e}_b$ ist. **[1P]**

6. Die offensichtliche Verallgemeinerung von Gln.(1) ist
$$\vec{r}_s = \vec{r}_s\,'\,; \quad \vec{r}_p = \gamma \left( \vec{r}_p\,' + \vec{e}_b v_0 t \right) \; ; \quad t = \gamma \left( t' + \frac{v_0}{c^2} \vec{e}_b \cdot \vec{r}\,' \right) \,. \tag{7}$$
Überzeugen Sie sich davon, dass Gln.(7) sich im relevanten Spezialfall zu Gln.(1) vereinfachen, und dass das Endergebnis identisch dem aus der Rechnung mittels Rotationen ist. **[4P]**

## 2.3 Lorentz–Boosts in $z$ Richtung als Gruppe

Eine mathematische Gruppe wurde auf dem vorigen Übungszettel eingeführt. Hier wollen wir zeigen, dass die Lorentz Boosts in eine feste Richtung eine Gruppe bilden, mit Elementen $g_{v_0}$, wobei beide Vorzeichen für die Geschwindigkeit $v_0$ zugelassen sind.

1. Was ist das neutrale Element $g_e$? **[1P]**

2. Welches Element ist invers zu $g_{v_0}$? **[1P]**

3. Zeigen Sie, dass zwei konsekutive Boosts mit Geschwindigkeiten $v_1$ und $v_2$ äquivalent zu einem einzigen Boost mit Geschwindigeit $v_s$ sind, wobei sich $v_s$ aus dem Additionstheorem für Geschwindigkeiten, Gl.(5.21a), ergibt. **[3P]**

*Hinweis:* Die dritte Eigenschaft gilt nur für Boosts entlang einer festen Richtung. Zwei Boosts in verschiedene Richtungen können im allgemeinen *nicht* durch einen einzigen Boost ersetzt werden. Man kann aber aus allgemeinen Boosts plus Rotationen eine Gruppe konstruieren, die sog. Lorentz–Gruppe.