Klassische Theoretische Physik II: Elektrodynamik (WiSe 2025/26) 13. Übungszettel (21. Januar 2026)

Abgabe der Hausaufgaben bis: Mittwoch, 28. Januar.

1 Präsenzaufgaben

1.1 Quickies

Ab jetzt werden die Übungszettel regelmäßig Kurzfragen ("Quickies") enthalten; auch in den Abschlussklausuren werden solche Fragen vorkommen, und ca. 25% der gesamten Punktzahl ausmachen. Hier wird grundlegendes Faktenwissen abgefragt, sowie einige sehr kurze Herleitungen.

Q1: Was ist die relativistische kinetische Energie eines Teilchens mit Masse m, das sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt?

Q2: Seien a und b zwei Vierervektoren. Wie ist das relativistische Skalarprodukt $a \cdot b$ definiert, und wie verhält sich dieses Produkt unter einer Lorentz–Transformation?

Q3: Was sind "zeitartige", "raumartige" und "lichtartige" Vierervektoren?

1.2 Relativistische Kinematik

1. Am Large Hadron Collider (LHC) am CERN werden Protonen auf Energien nahe 8 TeV ($= 8 \cdot 10^3$ GeV) beschleunigt; ihre Ruhemasse beträgt $m_p c^2 = 0.94$ GeV. Wie nahe kommen diese Protonen der Lichtgeschwindigkeit, d.h. was ist $1 - |\vec{v}_p|/c$?

2. In der Vorlesung wurden Myonen erwähnt, die durch Wechselwirkungen der Primärteilchen der kosmischen Strahlung produziert werden und nur mittels der Zeitdilatation die Erdoberfläche erreichen. Myonen haben noch schwerere Geschwister, die $\tau-$Leptonen; diese wechselwirken sehr ähnlich wie die Myonen (und Elektronen), haben aber eine etwa 17 mal größere Masse ($m_\tau c^2 \simeq 1.78$ GeV), und eine sehr viel kürzere Lebenszeit ($\tau_\tau \simeq 0.3 \cdot 10^{-12}$ s). Berechnen Sie die Strecke, die ein $\tau-$Lepton im Mittel zurück legt ehe es zerfällt. Wie hoch muss die Energie E_τ sein, damit ein $\tau-$Lepton im Mittel 50 m zurück legt? *Bemerkung:* Die Produktion von $\tau-$Leptonen, die vor ihrem Zerfall mindestens einige Dutzend Meter zurück legen, führt zu einer "double bang" Signatur, da sowohl bei der Produktion des $\tau-$Leptons als auch beim Zerfall Energie in Form anderer, stark wechselwirkender Teilchen deponiert wird. Diese Signatur wurde 2019 erstmals vom IceCube Experiment nachgewiesen, das in das antarktische Eis (buchstäblich am Südpol) eingebettet ist.

1.3 Kausalität I

Gegeben sei ein Beobachter, der im Ursprung eines Inertialsystems ruht, und sich smoit im Minkowski–Raum entlang der $ct-$Achse bewegt. (Diese Ergebnisse gelten in guter Näherung auch für Beobachter, die sich mit Geschwindigkeit $v \ll c$ relativ zum Ursprung bewegen.)

1. Skizzieren Sie (graphisch) den vergangenen und den zukünftigen Lichtkegel für diesen Beobachter, bei Zeit $t = 0$.

2. Zeigen Sie graphisch, dass der vergangene Lichtkegel dieses Beobachters in Zukunft größer sein wird als er jetzt ist, sodass in hinreichend ferner Zukunft *alle* Ereignisse [d.h. Punkte $(ct, \vec{r})$ im Minkowski–Raum] im vergangenen Lichtkegel dieses Beobachters sein werden (wobei in hinreichend ferner Zukunft dieser Beobachter wohl nicht mehr am Leben sein wird; dieser Effekt soll hier vernachlässigt werden).

3. Zeigen Sie graphisch, dass der zukünftige Lichtkegel dieses Beobachters in Zukunft kleiner sein wird, d.h. Ereignisse, die er jetzt nicht (mehr) beeinflussen kann wird er auch in Zukunft nicht beeinflussen können.

2 Hausaufgaben

2.1 Addition der Geschwindigkeiten

In der Vorlesung hatten wir gesehen, dass sich Geschwindigkeiten unter einem Boost in $z-$Richtung wie folgt transformieren, s. Gln.(5.21):

$$v_z = \frac{v'_z + v_0}{1 + v_0 v'_z / c^2}\,; \quad \vec{v}_\perp = \frac{\vec{v}'_\perp}{\gamma(v_0)\left[1 + v_0 v'_z / c^2\right]}\,. \tag{1}$$

Dabei ist v_0 die Relativgeschwindigkeit zwischen den beiden Inertialsystemen.

1. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für $v_0 < c$ und $|\vec{v}'| < c$ auch $|\vec{v}| < c$ gilt. Zeigen Sie nun, dass für $|\vec{v}'| = c$ auch $|\vec{v}| = c$ gilt, unabhängig von v_0. *Hinweis:* Spalten Sie $\vec{v}'$ wieder in einen longitudinalen und einen transversalen Anteil, $|v'_z| = c\cos\theta$ und $|\vec{v}'_\perp| = c\sin\theta$ mit $\theta \in [0, \pi]$. **[4P]**

2. In der Vorlesung wurde folgende Identität hergeleitet, s. Gl.(5.24):

$$\gamma(v) = \gamma(v_0)\gamma(v')\left(1 + \frac{v_0 v'_z}{c^2}\right)\,. \tag{2}$$

   Zeigen Sie mittels Gln.(1) und der Definition $\gamma(v) = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, dass Gl.(2) in der Tat gilt. *Hinweis:* Spalten Sie $\vec{v}'$ wie in der vorigen Teilaufgabe auf, wobei nun allerdings der Betrag $v' < c$. **[4P]**

2.2 Kausalität II

In dieser Aufgabe betrachten wir die verschiedenen Kausalitätsregionen algebraisch, nicht geometrisch. Zunächst definieren wir die zukünftigen und vergangenen Lichtkegel relativ zu einem Punkt $x_\mu = (ct, \vec{r})$:
Zukünftiger Lichtkegel: Menge aller $x' = (ct', \vec{r}')$ mit $(x - x')^2 \equiv (x_\mu - x'_\mu)(x^\mu - x'^\mu) > 0$ (Summenkonvention!) und $t' > t$;
Vergangener Lichtkegel: Menge aller $x' = (ct', \vec{r}')$ mit $(x - x')^2 > 0$ und $t' < t$.
Alle x'_μ mit raumartigen Abstand zu x_μ sind außerhalb beider Lichtkegel. (*Anmerkung:* x_μ und x'_μ beziehen sich hier auf zwei verschiedene Raum-Zeit Punkte, oder Ereignisse, im *gleichen* Inertialsystem!)

1. Zeigen Sie zunächst, dass dies für $x_\mu = 0$ (dem Ursprung) der geometrischen Definition entspricht. **[1P]**

2. Nun betrachten wir einen Punkt x'_μ der zur Zeit $t = 0$ *außerhalb* des Lichtkegels eines Beobachters am Ursprung liegt, mit $t' > 0$. Dieser Beobachter soll sich mit (positiver) Geschwindigkeit v entlang der $x-$Achse bewegen, d.h. $x_\mu(t) = (ct, vt, 0, 0)$, wobei wir auch $t < 0$ betrachten. Zeigen Sie, dass für $t \to -\infty$ der Punkt x'_μ im zukünftigen Lichtkegel dieses Beobachters lag, und dass für $t \to \infty$ der Punkt x'_μ im vergangenen Lichtkegel dieses Beobachters liegen wird. *Hinweis:* Die notwendigen Bedingungen auf die relativen Zeitkoordinaten gelten offensichtlich in diesen beiden Grenzfällen; zu zeigen ist also nur, dass $x_\mu(t) - x'_\mu$ in beiden Fällen zeitartig ist. **[2P]**

3. Zeigen Sie, dass der Punkt x'_μ einen Lichtkegel des bewegten Beobachters zu den Zeiten

$$t_{L\pm} = \frac{1}{c^2 - v^2} \left[c^2 t' - x' v \pm \sqrt{c^2 \left(x' - vt'\right)^2 + \left(c^2 - v^2\right)\left(y'^2 + z'^2\right)} \right] \tag{3}$$

   kreuzt. *Hinweis:* Der Abstand zwischen x_μ und x'_μ muss bei $t = t_{L\pm}$ lichtartig sein! **[4P]**

4. Zeigen Sie, dass $t_{L-} < 0$ wenn x'_μ raumartig zum Ursprung des Minkowskiraums liegt, wie hier angenommen. Was ist die Interpretation von t_{L-}? **[3P]**

5. Zeigen Sie, dass $t_{L+} > t'$, wenn x'_μ raumartig zum Ursprung des Minkowskiraums liegt; dies beweist, dass auch für einen bewegten Beobachter der zukünftige Lichtkegel immer kleiner wird, d.h. ein Punkt x'_μ, der bei $t = 0$ nicht im zukünftigen Lichtkegel liegt, wird auch für $t > 0$ nicht im zukünftigen Lichtkegel liegen (wohl aber irgendwann im vergangenen Lichtkegel, wie bereits erwähnt.) *Hinweis:* Zeigen Sie zunächst, dass

$$t_{L+} - t' = \frac{1}{c^2 - v^2} \left[v\left(vt' - x'\right) + \sqrt{c^2 \left(x' - vt'\right)^2 + \left(c^2 - v^2\right)\left(y'^2 + z'^2\right)} \right] .$$

Anmerkung: Für $y' = z' = 0$ kann dieses Ergebnis leicht geometrisch gezeigt werden, da die Grenzen des Lichtkegels relativ zu einem Punkt x_μ immer parallel zu $x = \pm ct$ sind, unabhängig von der Geschwindigkeit eines Beobachters am Punk x_μ. **[3P]**

2.3 Invarianz der Minkowski–Metrik

In der Vorlesung hatten wir gesehen, dass eine allgemeine Lorentz–Transformation eines Vierervektors a mit Hilfe der Matrix Λ geschrieben werden kann:

$$a_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda_\mu^\nu a'_\nu \equiv \Lambda_\mu^\nu a'_\nu \,, \tag{4}$$

wobei im zweiten Schritt Einsteins Summenkonvention benutzt wurde (über identische griechische Indizes – hier ν – wird summiert, wenn sie einmal als Superskript und einmal als Subskript erscheinen). Gl.(4) kann auch geschrieben werden als $a = \Lambda a'$, im Sinne eines Matritzenproduktes (Matrix mal Vektor ergibt einen Vektor). Ein Tensor zweiten Ranges T transformiert dementsprechend wie

$$T_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta T'_{\alpha\beta} = \left(\Lambda T' \Lambda^T\right)_{\mu\nu} \,; \tag{5}$$

hierbei bedeutet das Superskript T die Transposition der Matrix. Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass die Minkowski–Metrik

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) \,. \tag{6}$$

invariant ist unter *(i)* einem Boost in $z-$Richtung; *(ii)* einer allgemeinen Rotation, beschrieben durch die orthogonale (!) 3×3 Matrix $\mathcal{O}$. **[4P]**