# Klassische Theoretische Physik II: Elektrodynamik (WiSe 2025/26) 14. Übungszettel (28. Januar 2026)

**Abgabe der Hausaufgaben bis:** Mittwoch, 4. Februar.

# 1 Präsenzaufgaben

## 1.1 Quickies

Ab jetzt werden die Übungszettel regelmäßig Kurzfragen ("Quickies") enthalten; auch in den Abschlussklausuren werden solche Fragen vorkommen, und ca. 25% der gesamten Punktzahl ausmachen. Hier wird grundlegendes Faktenwissen abgefragt, sowie einige sehr kurze Herleitungen.

Q1: Was ist $p^2 := p_\mu p^\mu$ für ein Teilchen mit Masse $m$, das sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt?

Q2: Wie ist das Intervall der Eigenzeit $d\tau$ definiert?

Q3: Was ist die relativistische Verallgemeinerung von Newton's zweitem Axiom, $\vec{F} = \mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t$?

## 1.2 Anwendungen von Boosts

1. Gegeben sei ein Vierervektor $a_\mu = (a_0, \vec{a})$; wir können o.B.d.A. annehmen, dass $\vec{a}$ in $z-$Richtung zeigt. Welche Bedingung muss für die Beträge $|a_0|$ und $|\vec{a}|$ gelten, damit ein Inertialsystem $S'$ existiert in dem: *(i)* $a'_\mu = (a'_0, \vec{0})$; *(ii)* $a'_0 = 0$? *Hinweis:* Die Relativgeschwindigkeit $v_0$ zwischen den beiden Systemen muss kleiner als $c$ sein!

2. Ein neutrales Pion $\pi^0$ hat Masse $m_\pi c^2 \simeq 135$ MeV. In seinem Ruhesystem zerfällt es nach $\sim 10^{-16}$ s in zwei (masselose) Photonen. Zeigen Sie, dass in diesem System beide Photonen die Energie $E^*_\gamma = m_\pi c^2/2 \simeq 67.5$ MeV haben, und bis auf das Vorzeichen gleiche Impulse mit $|\vec{p}^{\,*}_\gamma| = E^*_\gamma/c$. *Hinweis:* Beim Pion–Zerfall ist der Viererimpuls erhalten, d.h. $p_\pi = p_{\gamma 1} + p_{\gamma 2}$; dies gilt in allen Inertialsystemen.

3. Nun betrachten wir das "Laborsystem", in dem das Pion die Energie $E_\pi > m_\pi c^2$ hat. Zeigen Sie, dass in diesem System die Energien der beiden Photonen im Intervall $[E_\pi(1-\beta)/2,\ E_\pi(1+\beta)/2]$ liegen, wobei natürlich $E_{\gamma 1} + E_{\gamma 2} = E_\pi$ (Energieerhaltung) auch in diesem System gilt; $\beta$ ist der Boostparameter, der aus $E_\pi$ und $m_\pi$ berechnet werden kann. *Hinweis:* Schreiben Sie im Ruhesystem des Pions den Impuls des 1. Photons in Boostrichtung als $|\vec{p}^{\,*}_\gamma| \cos\theta$, und berücksichtigen Sie, dass $\cos\theta$ alle Werte $\in [-1,\ 1]$ annehmen kann. Was passiert für $E_\pi \gg m_\pi c^2$? *1. Anmerkung:* Da Pionen keinen Spin haben, gibt es im Ruhesystem keine ausgezeichnete Richtung, d.h.

alle Werte von $\cos\theta$ sind gleich wahrscheinlich. Dementsprechend sind alle Werte der Photonenergie im Laborsystem innerhalb des erlaubten Intervalls gleich wahrscheinlich. *2. Anmerkung:* Neutrale Pionen werden in teilchenphysikalischen Experimenten sehr häufig produziert, sowohl am ELSA Beschleuniger hier in Bonn als auch am BELLE Experiment in Japan und bei ATLAS am CERN, an denen ebenfalls Bonner PhysikerInnen beteiligt sind.

# 2 Hausaufgaben

## 2.1 Relativistische Stöße

In dieser Aufgabe wollen wir die Kinematik relativistischer Stöße untersuchen. Wir nehmen an, dass sich die einlaufenden Teilchen entlang der $z-$Achse bewegen (oder gar nicht). Der gesamte Viererimpuls ist erhalten, $p_{\rm in} = p_{\rm out}$; das gilt in allen Inertialsystemen, wobei die Impulse selber in verschiedenen Systemen unterschiedliche Werte haben können.

1. Wir betrachten zunächst elastische Stöße. Die Viererimpulse der einlaufenden Teilchen seien $k_1$ und $k_2$, die der auslaufenden Teilchen $p_1$ und $p_2$. Die Erhaltung des Viererimpulses bedeutet dann

$$k_1 + k_2 = p_1 + p_2 \,. \tag{1}$$

   Man beachte, dass dies vier Komponentengleichungen (für die Energie und den relativistischen linearen Impuls) beinhaltet. Die Kinematik ist besonders einfach im sog. Schwerpunktsystem, das wir durch das Superskript $*$ kennzeichnen; hier gilt $\vec{k}_1^* = -\vec{k}_2^*$. Zeigen Sie, dass in diesem System auch $\vec{p}_1^* = -\vec{p}_2^*$. **[1P]**

2. Wir betrachten Stösse von Teilchen mit identischer Masse, $k_1^2 = k_2^2 = m^2c^2$; in elastischen Stößen ändert sich die Identität der Teilchen nicht, d.h. $p_1^2 = k_1^2$, $p_2^2 = k_2^2$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall $|\vec{p}_1^*| = |\vec{p}_2^*| = \left|\vec{k}_1^*\right| = \left|\vec{k}_2^*\right|$ gilt, und dass der Streuwinkel $\theta^*$ (der Winkel zwischen $\vec{p}_1^*$ und $\vec{k}_1^*$) alle Werte $\in [0, \pi]$ annehmen kann. (Reaktionen dieser Art, insbesondere $e^+e^- \to e^+e^-$, werden als Referenz–Reaktionen bei $e^+e^-$ Collidern benutzt, da sie theoretisch sehr gut verstanden und experimentell relativ leicht nachweisbar sind; dies gilt auch für den KEK-B Collider, an dem auch Bonner PhysikerInnen experimentieren.) **[3P]**

3. Häufig werden auch sog. “fixed target” Experimente durchgeführt, z.B. am ELSA–Beschleuniger in Bonn; in diesen Experimenten ist im Laborsystem $\vec{k}_2 = 0$. Bestimmen Sie $p_1$ und $p_2$ im Laborsystem als Funktion des Streuwinkels $\theta^*$, der im Schwerpunktsystem definiert ist. *Hinweis:* Machen Sie den Ansatz

$$p_1^* = (E^*,\, 0,\, p^*\sin\theta^*,\; p^*\cos\theta^*) \tag{2}$$

   und berechnen Sie $p_1$ durch einen geeigneten Lorentz–Boost. **[4P]**

4. Nun wollen wir ideal inelastische Stöße betrachten. Klassisches Beispiel ist die Kollision zweier Lehmklumpen mit gleicher Masse $m$. In der Newtonschen Beschreibung entsteht daraus im Schwerpunktsystem ein einziger ruhender Klumpen der Masse $2m$. Zeigen Sie, dass in der relativistischen Beschreibung die Masse dieses resultierenden Klumpens größer als $2m$ ist, und berechnen Sie diese Masse. Wie groß ist die Korrektur, wenn die beiden kollidierenden Klumpen sich im Schwerpunktsystem mit 30 m/s bewegen? **[3P]**

5. Nun wollen wir Reaktionen untersuchen, in denen zwei Teilchen der Masse $m$ kollidieren und zwei schwerere Teilchen der Masse $M > m$ produzieren. Zeigen Sie, dass diese Reaktion genau dann möglich ist, wenn $s := (k_1 + k_2)^2 \geq (2Mc)^2$. *Hinweis:* $s$ ist eine Lorentz–Invariante, d.h. es hat in allen Inertialsystemen den gleichen Wert. Der Beweis ist aber am einfachsten im Schwerpunktsystem, mittels Gl.(2); was ist die Beziehung zwischen $E^*$ und $p^*$ in diesem Fall, und wie hängt $s$ von $E^*$ ab? **[3P]**

6. Berechnen Sie $s$ für folgende Fälle: *(i)* Zwei Teilchen der Masse $m$, Energie $E \gg mc^2$ und $\vec{k}_1 = -\vec{k}_2$; *(ii)* ein Teilchen mit Energie $2E$, das auf ein ruhendes Teilchen trifft, wobei beide Teilchen wieder Masse $m$ haben. Der erste Fall beschreibt einen Collider wie das LHC, der zweite Fall beschreibt ein "fixed target" Experiment. Argumentieren Sie, unter Ausnützung des Ergebnisses der vorigen Teilaufgabe, dass ein Collider die insgesamt zur Verfügung stehende Energie $2E$ effizienter einsetzt. **[4P]**

## 2.2 Bonus Aufgabe

Stellen Sie dem Tutor mindestens eine intelligente Frage zum Stoff der Vorlesung! *Hinweis:* Ihr Tutor weiß nichts über den Inhalt der Klausur am 19.2. **[2P]**