

Klassische Theoretische Physik II: Elektrodynamik (WiSe 2025/26) 4. Übungszettel (6. November 2025)

Abgabe der Hausaufgaben bis: Mittwoch, 12. November.

1 Präsenzaufgaben

1.1 Parameterisiertes Linienintegral

In der Vorlesung hatten wir gesehen, dass ein Linienintegral über eine Parameterisierung der Linie $\vec{l}$ mittels eines Parameters t geschrieben werden kann, d.h. $\vec{l}(t)$ beschreibt die Linie, mit Anfangs- und Endpunkten $\vec{l}_a = \vec{l}(t_a)$ und $\vec{l}_b = \vec{l}(t_b)$:

$$I_l = \int_{t_a}^{t_b} dt \frac{d\vec{l}}{dt} \cdot \vec{V}(\vec{l}(t)). \quad (1)$$

Hier wollen wir zeigen, dass das Linienintegral unabhängig von der gewählten Parameterisierung der Linie ist; das ist notwendig, da diese Parameterisierung ja nicht eindeutig ist. (Es gibt sogar überabzählbar unendlich viele verschiedene Parameterisierungen der selben Linie.) Schreiben Sie dazu $t = t(z)$, d.h. t ist Funktion eines anderen Parameters z , und zeigen Sie mit Hilfe der Substitutionsregel, Gl.(M3.9) aus der Vorlesung, dass sich das Linienintegral (1) auch schreiben lässt als

$$I_l = \int_{z_a}^{z_b} dz \frac{d\vec{l}}{dz} \cdot \vec{V}(\vec{l}(z)), \quad (2)$$

wobei natürlich $\vec{l}(t(z_a)) = \vec{l}_a$ und $\vec{l}(t(z_b)) = \vec{l}_b$.

1.2 Wegunabhängigkeit des Linientegrals über ein Gradientenfeld

In der Vorlesung wurde (mehr oder weniger rigoros) gezeigt, dass das Linienintegral über ein Gradientenfeld nur von Anfangs- und Endpunkt der Linie abhängt, d.h. unabhängig vom Weg ist. Hier wollen wir das an einem (einfachen) Beispiel explizit kontrollieren. Dazu

betrachten wir das Vektorfeld $\vec{V}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(y) \\ f_3(z) \end{pmatrix}$.

1. Zeigen Sie zunächst, dass $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$, d.h. $\vec{V}$ muss sich in der Tat als Gradientenfeld darstellen lassen.
2. Geben Sie eine explizite Darstellung der Funktion $F(\vec{r})$, sodass $\vec{V}(\vec{r}) = \vec{\nabla} F$. *Hinweis:* F lässt sich als Summer dreier Terme schreiben.

3. Nun zeigen Sie, dass das Linienintegral $I_l = \int_{l_a}^{l_b} d\vec{l} \cdot \vec{V}$ in der Tat unabhängig vom Weg ist. *Hinweis:* Beschränken Sie sich auf Wege, die aus Wegstücken entlang einer der Achsen bestehen, sodass $d\vec{l}$ proportional to $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ oder $\vec{e}_z$ ist.

1.3 Flächenintegral über einen Zylinder

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{V}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$. Wir wollen den Fluss dieses Vektorfeldes durch einen Zylinder mit Länge L und Radius R bestimmen, der entlang der z -Achse symmetrisch um den Ursprung liegt (d.h. die beiden Stirnseiten sind bei $z = \pm L/2$, die Rotationsachse des Zylinders liegt entlang der z Achse).

1. Zeigen Sie, dass der Mantel nichts zum Fluss beiträgt, d.h. $\int_{\text{Mantel}} \vec{V} \cdot d\vec{a} = 0$. *Hinweis:* $d\vec{a}$ steht senkrecht auf der Fläche.
2. Zeigen Sie, dass die beiden Stirnseiten, bei $z = \pm L/2$, identische Beiträge zum Fluss machen. *Hinweis:* $d\vec{a}$ zeigt nach außen.
3. Nun berechnen Sie den Fluss durch eine Stirnseite. *Hinweis:* Benutzen Sie Zylinderkoordinaten.

2 Hausaufgaben

2.1 Fourier-Zerlegung

In dieser Aufgabe wollen wir uns noch einmal die Fourier-Zerlegung anschauen, anhand zweier stückweise linearer Funktionen, die auf dem Intervall $[0, L]$ definiert sind; d.h. wir wollen diese Funktionen darstellen als unendliche Summen,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \forall x \in [0, L]. \quad (3)$$

Hinweis: Wie in allen anderen Beispielen in dieser Vorlesung betrachten wir Funktionen, die an beiden Enden des Intervalls Nullstellen haben. Wenn diese Annahme nicht gemacht wird, muss man auf der rechten Seite innerhalb der Summe einen zweiten Term $b_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ hinzufügen. Da diese Kosinus Funktionen ebenfalls orthogonal zu den Sinus Funktionen sind (nach Integration über das Intervall $[0, L]$) können die Koeffizienten b_n dann ebenfalls durch Projektion bestimmt werden.

1. Zeigen Sie, dass

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx. \quad (4)$$

Hinweis: Diese Rechnung ist praktisch identisch mit der Rechnung in der Vorlesung, die zu Gl.(1.23) führte. [3P]

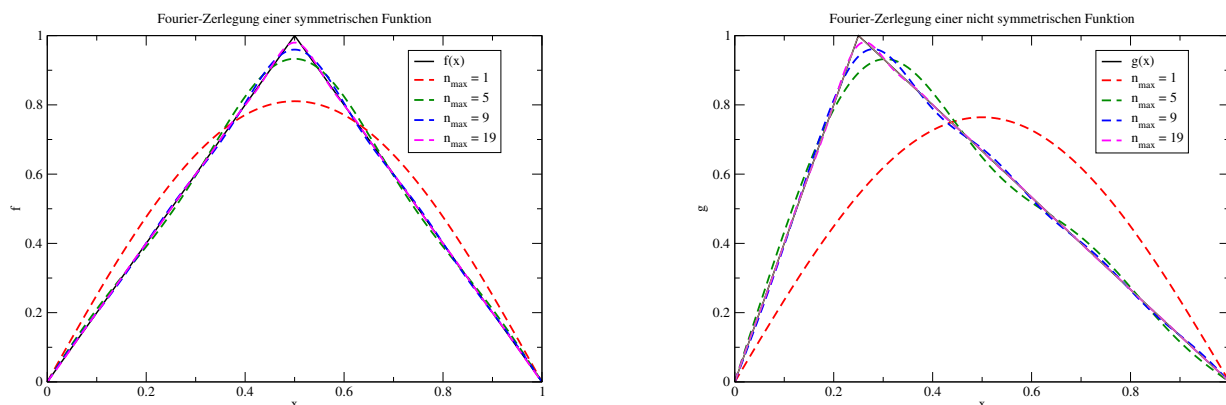


Abbildung 1: Approximative Fourier-Zerlegungen der Funktionen f (links) und g (rechts). Die gestrichelten Kurven zeigen die Summe in Gl.(3), wobei nur Terme mit $n \leq n_{\max}$ berücksichtigt wurden. Die Konvergenz ist offenbar gut, außer nahe dem Maximum, bei dem die erste Ableitung der ursprünglichen Funktion unstetig ist. Alle Terme in der Fourier-Reihe sind offensichtlich beliebig oft differenzierbar; echte Unstetigkeiten können daher nur im Grenzfall $n_{\max} \rightarrow \infty$ reproduziert werden.

2. Nun berechnen Sie die Stammfunktion von $x \sin(ax)$; dieses Ergebnis werden wir für beide zu zerlegende Funktionen benötigen. *Hinweis:* Die Rechnung ist sehr ähnlich der Herleitung von Gl.(3.5) aus der Vorlesung. [3P]

3. Zunächst betrachten wir die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{L}, & \text{falls } x \in [0, L/2] \\ 2 - \frac{2x}{L}, & \text{falls } x \in [L/2, L] \end{cases} \quad (5)$$

Zeigen sie durch Symmetrie-Überlegungen, dass die geraden Koeffizienten $a_2, a_4 \dots$ alle verschwinden. *Hinweis:* Schauen Sie sich das Verhalten des Integranden in Gl.(4) unter Spiegelung am Punkt $x = L/2$ an. [1P]

4. Führen Sie die Fourier-Zerlegung explizit durch, d.h. bestimmen Sie die verbleibenden Koeffizienten durch Integration. *Hinweis:* Die Koeffizienten sind unabhängig von L , und fallen wie $1/n^2$ ab. [3P]

5. Nun wiederholen Sie die Rechnung für die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} \frac{4x}{L}, & \text{falls } x \in [0, L/4] \\ \frac{4}{3} - \frac{4x}{3L}, & \text{falls } x \in [L/4, L] \end{cases} \quad (6)$$

d.h. berechnen Sie auch hier die Koeffizienten explizit, mittels Gl.(4) (wobei natürlich $f(x)$ durch $g(x)$ ersetzt werden muss). *Hinweis:* Die Koeffizienten sind wieder unabhängig von L und fallen wie $1/n^2$ ab, aber jetzt verschwindet nur jeder vierte Koeffizient, d.h. $a_{4k} = 0$. [4P]

Die Konvergenz der beiden Fourier-Zerlegungen ist in Abb. 1 illustriert. Die schwarze, durchgezogene Kurve zeigt jeweils die ursprüngliche Funktion f (links) bzw. g (rechts); die farbigen, gestrichelten Kurven zeigen partielle Fourier-Zerlegungen, d.h. endliche Summen der Form (3), mit zunehmender Anzahl von Termen, wobei auch Terme mit verschwindenden Koeffizienten bei $n_{\max}$ mit gezählt wurden. Unsere Funktionen f und g entsprechen übrigens der anfänglichen Auslenkung einer Saite, die in der Mitte (f) oder auf einem Viertel der Länge (g) gezupft wird, wobei man eine echte Saite nicht so weit wird auslenken können.

2.2 Flächenintegral über einen Zylinder

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{V}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} x(x^2 + y^2) \\ y(x^2 + y^2) \\ 0 \end{pmatrix}$. Wir wollen den Fluss dieses Vektorfeldes durch einen Zylinder mit Länge L und Radius R bestimmen, der entlang der z -Achse symmetrisch um den Ursprung liegt (d.h. die beiden Stirnseiten sind bei $z = \pm L/2$, die Rotationsachse des Zylinders liegt entlang der z Achse).

1. Zeigen Sie, dass die Stirnseiten nichts zum Fluss beitragen, d.h. $\int_{\text{Stirnseiten}} \vec{V} \cdot d\vec{a} = 0$.
Hinweis: $d\vec{a}$ steht senkrecht auf der Fläche. [1P]
2. Nun berechnen Sie den Fluss durch den Mantel. *Hinweis:* Benutzen Sie Zylinderkoordinaten, in denen $\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ z \end{pmatrix}$. Was ist $d\vec{a}$ in diesen Koordinaten? [3P]