

Klassische Theoretische Physik II: Elektrodynamik (WiSe 2025/26) 5. Übungszettel (12. November 2025)

Abgabe der Hausaufgaben bis: Mittwoch, 19. November.

1 Präsenzaufgaben

1.1 Quotientenregel

Leiten Sie die Quotientenregel, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, her aus der Produktregel, $(fg)' = f'g + fg'$ und der Kettenregel, $[f(h(x))]' = f'(h(x))h'(x)$.

1.2 Taylor-Entwicklung

Entwickeln Sie die Funktionen $f_1(x) = 1/(1+x)$, $f_2(x) = \sqrt{1+x}$, $f_3(x) = \ln(1+x)$ um den Ursprung, d.h. um $x = 0$; diese Entwicklung ist nur sinnvoll für $|x| \ll 1$. *Hinweis:* Entwickeln Sie die Funktionen bis zur Ordnung x^2 , unter Verwendung der Taylor-Reihe, Gl.(3) auf dem 1. Übungszettel.

1.3 Satz von Stokes

In dieser Aufgabe wollen wir den Satz von Stokes an einigen Beispielen überprüfen. Dieser Satz besagt, s. Gl.(M3.16):

$$\int_{\mathcal{A}} d\vec{a} \cdot [\nabla \times \vec{V}(\vec{r})] = \int_{\partial\mathcal{A}} d\vec{l} \cdot \vec{V}(\vec{r}), \quad (1)$$

wobei $\partial\mathcal{A}$ der Rand des Gebietes $\mathcal{A}$ ist, d.h. das Linienintegral geht über eine geschlossene Linie. Als Fläche betrachten wir das Quadrat $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$ bei konstantem $z = z_0$.

1. Was ist das entsprechende Flächenelement $d\vec{a}$?
2. Wie sehen die vier Teilstücke des Linienintegrals auf der rechten Seite von Gl.(1) aus?
Hinweis: Wenn die Richtung von $d\vec{a}$ festgelegt ist, insbesondere das Vorzeichen, folgt die “Drehrichtung” des geschlossenen Linienintegrals aus der rechten-Hand-Regel: Wenn der Daumen in Richtung von $d\vec{a}$ zeigt, geben die Finger die Richtung an, in der die geschlossene Linie durchlaufen werden muss.
3. Zeigen Sie, dass Gl.(1) “trivial” gilt, falls $\vec{V}(\vec{r})$ ein Gradientenfeld ist, $\vec{V}(\vec{r}) = \vec{\nabla} f(\vec{r})$ für beliebige skalare Funktion f . *Hinweis:* S. Gln.(M2.20) und (M3.8)!

4. Nun betrachten Sie

$$\vec{V}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ xy \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass beide Seiten der Gleichung (1) verschwinden.

5. Zum Abschluss betrachten Sie

$$\vec{V}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} yz \\ 2xz \\ xy \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass beide Seiten der Gleichung (1) den gleichen Wert ($\neq 0$) ergeben

2 Hausaufgaben

2.1 Elektrisches Feld einer geladenen Kreisfläche

In der Vorlesung wurde das elektrische Feld einer Schnur mit konstanter Ladungsdichte berechnet. Hier wollen wir die analoge Rechnung für eine homogen geladene Kreisfläche durchführen. Sei R der Radius des Kreises und σ die konstante (zwei-dimensionale) Ladungsdichte (Ladung pro Fläche), sodass $Q = \pi\sigma R^2$ die Gesamtladung der Fläche ist. Wählen Sie das Koordinatensystem so, dass die Kreisfläche in der (x, y) Ebene liegt; der Mittelpunkt der Fläche ist der Ursprung.

1. Wir wollen das elektrische Feld am Punkt $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ berechnen. Zeigen Sie dazu aus Symmetrieüberlegungen, dass $E_x(\vec{r}_1) = E_y(\vec{r}_1) = 0$. [1P]
2. Schreiben Sie $E_z(\vec{r}_1)$ als zweidimensionales Integral über die Kreisfläche. *Hinweis:* Benutzen Sie Zylinderkoordinaten! [1P]
3. Nun berechnen Sie das Integral aus dem vorigen Schritt. Zeigen Sie dazu, dass $F(x) = -1/\sqrt{x^2 + a^2}$ die Stammfunktion von $x/(x^2 + a^2)^{3/2}$ ist, für beliebige reelle Konstante a , und benutzen Sie dies, um das Integral über die radiale Koordinate zu berechnen. [4P]
4. Zeigen Sie, dass für $|z| \ll R$ das elektrische Feld einen endlichen, konstanten Wert annimmt; im Fall einer geladenen Schnur divergiert das Nahfeld (über dem Mittelpunkt der Schnur) linear mit dem Abstand. [1P]
5. Zeigen Sie, dass für $z^2 \gg R^2$ das Feld wieder dem einer Punktladung entspricht. *Hinweis:* Sie müssen die Quadratwurzel im Zähler entwickeln, $\sqrt{z^2 + R^2} = z\sqrt{1 + R^2/z^2} \simeq z[1 + R^2/(2z^2)]$. [2P]

2.2 Elektrisches Feld eines geladenen Quadrates

Nun betrachten wir ein homogen geladenes Quadrat, mit Kantenlänge a und Flächenladungsdichte σ (d.h. Gesamtladung $Q = a^2\sigma$). Legen Sie die Koordinatenachsen wieder so, dass das Quadrat in der (x, y) Ebene liegt, mit dem Ursprung als Mittelpunkt. Diesmal schauen wir uns das Feld am Punkt $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ an.

1. Zeigen Sie, dass $E_y(\vec{r}_2) = E_z(\vec{r}_2) = 0$. [1P]
2. Schreiben Sie $E_x(\vec{r}_2)$ als zweidimensionales Integral. *Hinweis:* Benutzen Sie kartesische Koordinaten. [1P]
3. Nun führen Sie das Integral über y' aus. *Hinweis:* Benutzen Sie (wie in der Vorlesung gezeigt), dass $F(y') = y'/[c^2\sqrt{y'^2 + c^2}]$ die Stammfunktion von $1/(y'^2 + c^2)^{3/2}$ ist, für beliebige reelle Konstante c . Beachten Sie, dass bei der Integration über y' alle anderen Koordinaten als Konstanten behandelt werden können. [2P]
4. Um das Integral über x' zu berechnen, benutzen Sie die Substitution $t = x - x'$, und zeigen und benutzen Sie, dass $F(t) = -(2/a) \ln \frac{a/2 + \sqrt{t^2 + a^2/4}}{t}$ die Stammfunktion von $1/[t\sqrt{t^2 + a^2/4}]$ ist. [3P]
5. Zeigen Sie, dass das Feld im Nahbereich logarithmisch divergiert; d.h. für $x = a/2 + \epsilon$ steigt das Feld $E_x \propto \ln(a/\epsilon)$ an wenn $\epsilon \rightarrow 0$. [2P]
6. Zeigen Sie schliesslich, dass für $x \gg a$ das Feld sich wieder dem einer Punktladung Q im Ursprung annähert. *Hinweis:* Dazu müssen Sie Wurzeln von der Form $\sqrt{(x \pm a/2)^2 + a^2/4}$ bis zur Ordnung a^2/x entwickeln; im letzten Schritt können Sie benutzen, dass $\ln \frac{f(r)}{f(r)-\epsilon} \simeq \epsilon$, wo $r = a/x$ und $f(r) = 1 + \mathcal{O}(r)$; diese Näherung folgt aus $\ln(1 + \epsilon) \simeq \epsilon$ für $|\epsilon| \ll 1$. [3P]

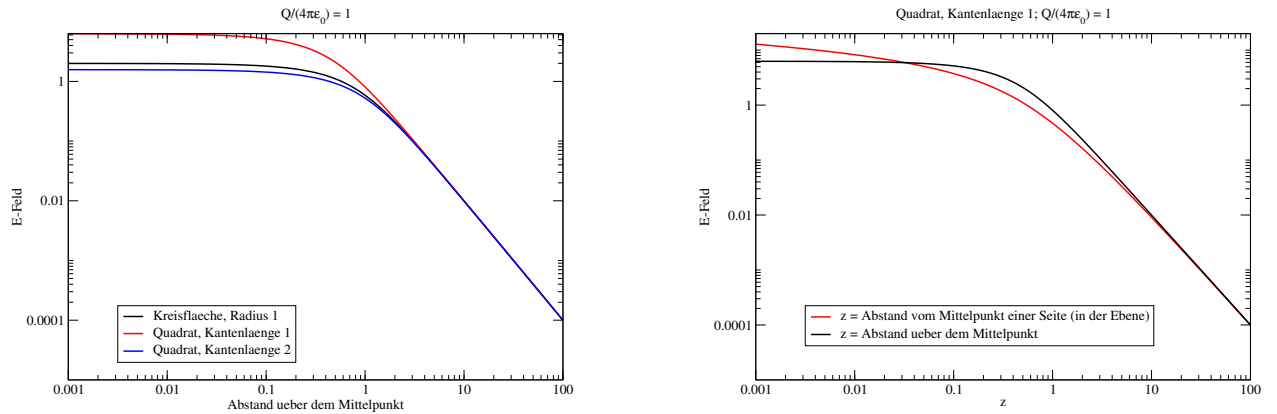


Abbildung 1: Links: Elektrisches Feld über einer homogen geladenen Fläche. Die schwarze Kurve ist das Ergebnis aus 2.1, für eine kreisförmige Fläche mit Radius 1. Die rote und blaue Kurve sind für ein Quadrat mit verschiedener Kantenlänge, wobei das zweite Integral numerisch berechnet wurde. Da die Gesamtladung fest gehalten wird, ist das Nahfeld eines größeren Quadrats, mit kleinerer Ladungsdichte, kleiner; das Fernfeld ist in allen Fällen gleich. Die rechte Abbildung ist für ein Quadrat der Kantenlänge 1. Die schwarze Kurve ist identisch der roten Kurve aus der linken Abbildung; die rote Kurve zeigt das Ergebnis aus 2.2. Das Nahfeld hängt offensichtlich von der Orientierung relativ zum Quadrat ab, das Fernfeld aber nicht.

Bemerkung: Die Ergebnisse aus 2.1.5 und 2.2.6 legen nahe, dass man auch eine Fläche (“membrane”) zur Beschreibung von Elementarteilchen benutzen könnte, statt einer Schnur (“string”). Während eine (Super-)Stringtheorie in der Tat die gegenwärtig vielleicht beste Kandidatin für eine “ultimate Theorie” (der Teilchenphysik und Gravitation) ist, hat sich die Beschreibung von Elementarteilchen durch (sehr kleine) Membranen als quantenmechanisch inkonsistent erwiesen.